

Sur l'homologie des espaces de nœuds non-compacts

Victor Tourtchine

Mots clés. Discriminant de l'espace de nœuds non-compacts, bigèbre des diagrammes de cordes, complexe de Hochschild, opérades des algèbres de Poisson, de Gerstenhaber, de Batalin-Vilkovisky.

Résumé. La suite spectrale de Vassiliev, voir [V1], calcule l'homologie de l'espace de nœuds non-compacts dans \mathbb{R}^d , $d \geq 3$. Dans ce travail on décrit le premier terme de cette suite spectrale en terme de l'homologie du complexe de Hochschild pour l'opérade des algèbres de Poisson, si d est impair (resp. pour l'opérade des algèbres de Gerstenhaber, si d est pair). En particulier, la bigèbre des diagrammes de cordes apparaît comme sous-espace de cette homologie. L'homologie en question peut être vue comme l'espace des classes caractéristiques de l'homologie des complexes de Hochschild pour les algèbres de Poisson (resp. de Gerstenhaber), étudiées comme algèbres associatives. On donne aussi une simplification des calculs du premier terme de la suite spectrale de Vassiliev.

0. Introduction

0.1. Histoire du sujet

On appelle *nœuds non-compacts* les applications lisses injectives non-singulières $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^d$, qui coïncident hors d'un certain sous-ensemble compact de \mathbb{R} avec une application linéaire fixée. Les nœuds non-compacts forment un sous-ensemble ouvert partout dense dans l'espace (affine) \mathcal{K} de toutes les applications lisses $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ avec le même comportement à l'infini. Son complément $\Sigma \subset \mathcal{K}$ est un *espace discriminant*, qui consiste des applications ayant des auto-intersections ou des singularités. Toute classe de cohomologie $\gamma \in H^i(\mathcal{K} \setminus \Sigma)$ de l'espace de nœuds peut être réalisée comme un indice d'enlacement avec une chaîne convenable dans Σ de codimension $i + 1$ dans \mathcal{K} .

Pour simplifier (suivant [V5]), on va supposer que l'espace \mathcal{K} est d'une dimension ω très grande mais finie. L'explication rigoureuse de l'hypothèse utilise des approximations de dimension finie de l'espace \mathcal{K} (voir [V1]). Ci-dessous nous mettons entre guillemets les affirmations non-rigoureuses, qui utilisent cette hypothèse et qui sont à préciser.

L'outil principal de cette approche pour calculer l'homologie de l'espace de nœuds est la résolution simpliciale (construite dans [V1]) du discriminant Σ appelée discriminant résolu σ . La projection naturelle $\pi : \bar{\sigma} \rightarrow \bar{\Sigma}$ induit une "équivalence homotopique" des compactifiés par un point des espace σ et Σ . Par la "dualité d'Alexander" les groupes d'homologie $\tilde{H}_*(\bar{\sigma}) \equiv \tilde{H}_*(\bar{\Sigma})$ de ces compactifiés "coïncident" (à un décalage de dimension près) avec les groupes de cohomologie de l'espace des nœuds:

$$\tilde{H}^i(\mathcal{K} \setminus \Sigma, \mathbb{k}) \simeq \tilde{H}_{\omega-i-1}(\bar{\Sigma}, \mathbb{k}) \equiv \tilde{H}_{\omega-i-1}(\bar{\sigma}, \mathbb{k}). \quad (0.1.1)$$

(\mathbb{k} est un anneau commutatif de coefficients.)

L'espace σ possède une filtration naturelle

$$\emptyset = \sigma_0 \subset \sigma_1 \subset \sigma_2 \subset \dots \quad (0.1.2)$$

Conjecture 0.1.3. *La suite spectrale (de Vassiliev) associée à la filtration (0.1.2) et calculant l'homologie de Borel-Moore de la résolution σ dégénère sur \mathbb{Q} au premier terme.*

□

Il existe aussi une autre conjecture plus forte.

Conjecture 0.1.4. *La filtration (0.1.2) se scinde homotopiquement, autrement dit $\bar{\sigma}$ est “homotopiquement équivalent” au bouquet $V_{i=1}^{+\infty}(\bar{\sigma}_i/\bar{\sigma}_{i-1})$. \square*

Cette conjecture entraînerait la dégénérescence de notre *suite spectrale principale* au premier terme sur n’importe quel anneau commutatif \mathbb{k} de coefficients. Modulo cette conjecture, pour calculer la cohomologie de l’espace de nœuds non-compacts dans \mathbb{R}^d , avec $d \geq 4$ (si $d = 3$, la suite spectrale étudiée ne calcule qu’un certain sous-groupe dans la cohomologie de l’espace de nœuds), il suffit de savoir le premier terme.

D’un autre côté, dans les termes $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$ de la filtration on a une décomposition cellulaire très simple, qui ne dépend que de la parité de la dimension d de l’espace \mathbb{R}^d à un décalage de dimension près). Ceci rend trivial du point de vue géométrique le calcul du premier terme de la suite spectrale de Vassiliev.

Pour calculer le premier terme V.A.Vassiliev a introduit une *filtration auxiliaire* sur les termes $\sigma_i \setminus \sigma_{i-1}$. La suite spectrale associée à cette filtration dégénère au deuxième terme, parce que son premier terme (pour tout i) est concentré en une seule ligne. Le zéroième terme de la suite auxiliaire avec sa zéroième différentielle est une somme directe de produits tensoriels de complexes des graphes connexes. L’homologie du complexe des graphes connexes sur m points est concentrée dans une seule dimension et est isomorphe à $\mathbb{Z}^{(m-1)!}$, voir [V3], [V4]. Elle a une description simple comme espace engendré par les arbres et quotienté par les relations de trois termes, voir [V3], [T].

Pour $d = 3$ en cohomologie de degré zéro la suite spectrale de Vassiliev calcule une partie de la cohomologie de degré zéro — les *invariants de type fini*, que l’on peut définir de manière plus simple et géométrique, voir [ChDL]. L’objet dual à l’espace des invariants de type fini est la *bigèbre des diagrammes de cordes*, qui a été intensément étudiée pendant les dernières années, voir [BN], [ChD], [ChDL], [K1], [Kn], [L], [NS], [S], [Z]. Le but de ce travail est de bien montrer que dans l’homologie supérieure des espaces de nœuds (non-compacts) on a aussi de très belles mathématiques.

0.2. Contenu. Résultats principaux

La cohomologie du complexe des graphes connexes (sur m points) — l’espace dual à celui que l’on considèrerait dans la section précédente, a aussi une description très simple.

Considérons une algèbre de Lie sur \mathbb{Z} libre avec m générateurs. Considérons son sous-espace linéairement engendré par les crochets tels, que chaque générateur y est présenté exactement une fois. Ce sous-espace est isomorphe à $\mathbb{Z}^{(m-1)!}$. Il se trouve que la cohomologie en question est exactement ce sous-espace.

Cet isomorphisme vient de la construction suivante:

Considérons l’espace des applications injectives d’un ensemble fini M de m éléments dans \mathbb{R}^d , $d \geq 1$. Cet espace peut être vu comme un analogue de dimension finie de l’espace des nœuds. Le discriminant correspondant (qui se compose des applications non-injectives) admet aussi une résolution simpliciale, dont la filtration (analogue à (0.1.2)) est homotopiquement triviale, voir [V2], [V4]. Le terme supérieur non-trivial $\sigma_{m-1} \setminus \sigma_{m-2}$ de la filtration donne exactement le complexe des graphes connexes sur l’ensemble M , dont l’homologie correspond à la cohomologie en degré maximal de l’espace des applications injectives $M \hookrightarrow \mathbb{R}^d$. D’un autre côté son dual l’homologie en degré maximal est décrite comme le sous-espace (d’une algèbre de Lie libre), que l’on vient de définir, voir, par exemple, [G], [Co].

La description de la cohomologie des complexes des graphes connexes ainsi construite

permet de définir le complexe dual au premier terme de la suite spectrale auxiliaire. L'homologie de ce complexe donne le premier terme de la suite spectrale, qui est duale à la suite principale et qui calcule l'homologie des espaces des nœuds. Dans ce travail je vais omettre la plupart des détails techniques (qui seront, d'ailleurs, scrupuleusement étudiés dans ma thèse, voir [T]) et je donne tout de suite, voir la section 1, la description de ce complexe, que l'on va appeler le complexe des $*$ -diagrammes de crochets ou bien le complexe des B_* -diagrammes et que l'on va désigner par $CB_*D^{odd}(\mathbb{k})$, $CB_*D^{even}(\mathbb{k})$ (*Complex of Bracket $*$ -Diagrams*) pour d impair et d pair respectivement (\mathbb{k} est un anneau commutatif de coefficients, $CB_*D^{odd(even)}(\mathbb{k}) \equiv CB_*D^{odd(even)}(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{k}$).

Dans le discriminant on peut considérer les strates, engendrées par les applications $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ avec seulement des auto-intersections (on exclut les applications ayant des singularités). Les diagrammes dans $CB_*D^{odd(even)}(\mathbb{k})$ correspondant à tels strates sont appelés (simplement) *diagrammes de crochets* ou *B-diagrammes*. L'espace engendré par ces diagrammes possède une structure de sous-complexe de $CB_*D^{odd(even)}(\mathbb{k})$. Le complexe ainsi obtenu est désigné par $CBD^{odd(even)}(\mathbb{k})$ (*Complex of Bracket Diagrams*, $CBD^{odd(even)}(\mathbb{k}) \equiv CBD^{odd(even)}(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{k}$).

Dans cette section on décrit également le moyen de simplifier les calculs de l'homologie du complexe $CB_*D^{odd(even)}(\mathbb{k})$. Ce complexe (qui simplifie les calculs et qui est homologiquement équivalent à $CB_*D^{odd(even)}(\mathbb{k})$) est un complexe-quotient de $CBD^{odd(even)}(\mathbb{k})$; il est désigné par $CB_0D^{odd(even)}(\mathbb{k})$ (*Complex of Bracket 0-Diagrams*, $CB_0D^{odd(even)}(\mathbb{k}) \equiv CB_0D^{odd(even)}(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{k}$).

Dans la section 2 on définit une structure d'algèbres de Hopf différentielles (super-cocommutatives) sur les complexes $CB_*D^{odd(even)}(\mathbb{k})$, $CBD^{odd(even)}(\mathbb{k})$, $CB_0D^{odd(even)}(\mathbb{k})$. Les algèbres de Hopf différentielles ainsi obtenues sont désignées par $DHAB_*D^{odd(even)}(\mathbb{k})$, $DHABD^{odd(even)}(\mathbb{k})$, $DHAB_0D^{odd(even)}(\mathbb{k})$, respectivement.

En fait il arrive souvent, que la géométrie du discriminant contienne des informations sur la structure comultiplicative (et multiplicative, si l'espace de complément est un H -espace) dans l'homologie du complément. Des conjectures sur le rapport en question dans le cas des espaces de nœuds non-compacts sont formulées dans la section 2.3 (Conjectures 2.3.5-6).

Si l'anneau principal \mathbb{k} est un corps, alors l'homologie d'une algèbre de Hopf différentielle (sur \mathbb{k}) forme une algèbre de Hopf; si \mathbb{k} ne l'est pas, alors l'homologie correspondante est étudiée seulement comme une algèbre sur \mathbb{k} .

L'espace de nœuds non-compacts dans \mathbb{R}^d , $d \geq 3$, est un H -espace, donc son homologie sur un corps forme une bigèbre (algèbre de Hopf, pour $d \geq 4$). Si l'anneau de coefficients \mathbb{k} n'est pas un corps, alors nous considérons l'homologie (sur \mathbb{k}) de ces espaces comme des algèbres sur \mathbb{k} . On a les théorèmes suivants:

Théorème 2.3.7 [T]. *La bigèbre de l'homologie sur un corps de caractéristique nulle de l'espace de nœuds non-compacts dans \mathbb{R}^d , $d \geq 3$, est supercommutative.* \square

Théorème 2.4.1. *L'algèbre (de Hopf) de l'homologie de $DHABD^{odd(even)}(\mathbb{k})$ est supercommutative pour n'importe quel anneau commutatif \mathbb{k} .* \square

Théorème 2.4.2. *L'algèbre (de Hopf) de l'homologie de $DHAB_*D^{even}(\mathbb{k})$ est supercommutative pour n'importe quel anneau commutatif \mathbb{k} .* \square

La méthode de la démonstration du Théorème 2.4.2 ne se généralise pas dans le cas de $DHAB_*D^{odd}(\mathbb{k})$.

Il est montré également, voir la section 2.7, que l'inclusion naturelle

$$DHABD^{odd(even)}(\mathbb{k}) \hookrightarrow DHAB_*D^{odd(even)}(\mathbb{k}) \quad (0.2.1)$$

pour le cas, où \mathbb{k} est un corps de caractéristique nulle, induit une application injective en homologie. De plus, pour d pair le noyau est un idéal, engendré par un seul générateur primitif, pour d impair – par deux générateurs primitifs. On en déduit, que l’algèbre de Hopf de l’homologie de $DHAB_*D^{odd}(\mathbb{k})$ est supercommutative, si \mathbb{k} est un corps de caractéristique nulle.

Le rapport avec la bigèbre des diagrammes de cordes est donné dans la section 2.8.

Dans les sections 3.1.1-2 on donne la construction (due à M.Gerstenhaber et A.Voronov [GV]) du complexe de Hochschild pour les opérades linéaires munies d’un morphisme, venant de l’opérade des algèbres associatives. L’homologie de tels complexes possède une structure d’algèbres de Gerstenhaber, i.e. algèbres supercommutatives munies d’un crochet impair de Lie compatible avec la multiplication.

Le résultat principal de ce travail est, que les complexes $CBD^{odd}(\mathbb{k})$, $CBD^{even}(\mathbb{k})$, $CB_*D^{even}(\mathbb{k})$ sont les complexes de Hochschild normalisés pour les opérades d’algèbres de Poisson, de Gerstenhaber, de Batalin-Vilkovisky, respectivement (voir les Théorèmes 3.3.3, 3.3.6). Ce qui explique le fait de la supercommutativité dans l’homologie de $DHABD^{odd(even)}$ et de $DHAB_*D^{even}$.

0.3. Remerciments

Premièrement je voudrais exprimer une reconnaissance profonde à mon directeur de recherches V.A.Vassiliev pour m’avoir posé le problème, pour sa disponibilité scientifique, pour son soutien et ses encouragements.

Je voudrais remercier sincèrement mes tuteurs — Marc Chaperon (à Paris 7) et A.V.Chernavsky (à l’Université d’Etat de Moscou).

Je veux remercier M.Finkelberg et S.Loktev pour leurs très bons conseils mathématiques.

Et bien sûr, je suis très reconnaissant à P.Cartier, M.Kontsevich, M.Déza, D.Panov.

0.4. Notations

On note

\bar{X} le compactifié par un point d’un espace topologique X ;

$\tilde{H}_*(X)$, $\tilde{H}^*(X)$ la (co)homologie réduite par rapport à un point d’un espace topologique X ;

d la dimension de l’espace considéré \mathbb{R}^d ;

CB_*D^{odd} , CB_*D^{even} les complexes des B_* -diagrammes (= *-diagrammes de crochets) pour d impair et d pair respectivement;

CBD^{odd} , CBD^{even} les complexes des B -diagrammes (= diagrammes de crochets);

CB_0D^{odd} , CB_0D^{even} les complexes des B_0 -diagrammes (= 0-diagrammes de crochets);

Si l’on considère les cas de d pair et impair simultanément, on écrit: $CB_*D^{odd(even)}$, $CBD^{odd(even)}$, etc.

$DHAB_*D^{odd(even)}$, $DHABD^{odd(even)}$, $DHAB_0D^{odd(even)}$ les algèbres de Hopf différentielles des $B_*/B/B_0$ -diagrammes.

Si l’on considère les cas des *-diagrammes et des diagrammes simultanément, on écrit: $(*)$ -diagrammes, $B_{(*)}$ -diagrammes, $CB_{(*)}D^{odd(even)}$, etc.

1. Les complexes des diagrammes de crochets, des $*$ -diagrammes de crochets, des 0-diagrammes de crochets $CBD^{odd(even)}(\mathbb{k})$, $CB_*D^{odd(even)}(\mathbb{k})$, $CB_0D^{odd(even)}(\mathbb{k})$

1.1. (A, b) -configurations

Soit A une collection finie non-ordonnée de nombres entiers supérieurs ou égaux à 2, $A = (a_1, a_2, \dots, a_{\#A})$, et soit b un nombre entier non-négatif. Définissons $|A| := a_1 + \dots + a_{\#A}$. On va appeler (A, b) -*configuration* un ensemble de $|A|$ points distincts de \mathbb{R} décomposé en $\#A$ groupes des cardinalités $a_1, a_2, \dots, a_{\#A}$; et b point différents (dont une partie peut coïncider avec les $|A|$ points considérés ci-dessus). Ces b points seront appelés *astérisques*. Pour la brièveté les $(A, 0)$ -configurations seront appelées simplement *A-configurations*.

Les (A, b) -configurations sont liées à une stratification naturelle dans σ et Σ . Disons qu'une application $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\Phi \in \Sigma$, respecte une (A, b) -configuration, si elle recolle les points dans chacun des groupes des cardinalités $a_1, a_2, \dots, a_{\#A}$, et si sa dérivée Φ' égale zéro dans les derniers b points de cette configuration. Pour toute (A, b) -configuration l'ensemble des applications qui la respectent est un sous-ensemble affine de \mathcal{K} de codimension $d(|A| - \#A + b)$. Le nombre $|A| - \#A + b$ sera appelé la *complexité* de la configuration. Deux (A, b) -configurations sont dites *équivalentes*, si elles peuvent être obtenues l'une de l'autre par un homéomorphisme conservant l'orientation $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Fixons une (A, b) -configuration J de complexité i et avec j points géométriquement distincts sur \mathbb{R} . La strate formée des applications $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ dans Σ , qui respectent au moins une (A, b) -configuration J' équivalente à J , peut être paramétrisée par l'espace $S(J)$ de fibré affine, dont la base est l'espace E^j des (A, b) -configurations J' équivalentes à J , et le fibré est $\mathbb{R}^{\omega-di}$. Notons que E^j est contractible (étant une cellule ouverte de dimension j), alors cette fibration peut être trivialisée

$$S(J) \simeq E^j \times \mathbb{R}^{\omega-di}. \quad (1.1.1)$$

Remarque 1.1.2. La strate correspondante peut ne pas être isomorphe à $S(J)$ à cause de ses auto-intersections possibles. \square

Permettons aux (A, b) -configurations (resp. A -configurations), $A = (a_1, \dots, a_{\#A})$, d'avoir $a_i = 1$ pour de certains $i \in \{1, \dots, \#A\}$. De telles (A, b) -configurations seront appelées (A, b) -configurations *généralisées* (resp. A -configurations *généralisées*).

Les (A, b) -configurations généralisées avec au moins un $a_i = 1$ (qui ne correspond à aucun astérisque) n'ont pas d'interprétation géométrique dans la stratification du discriminant, mais elles nous seront très utiles pour certaines considérations algébriques.

Définition 1.1.3. On va appeler *composante minimale* d'une (A, b) -configuration soit l'un de ses astérisques qui ne coïncide avec aucun des $|A|$ premiers points, soit l'un des $\#A$ groupes de points avec tous les astérisques qui y sont contenus. \square

1.2. Les espaces des diagrammes de crochets, des $*$ -diagrammes de crochets

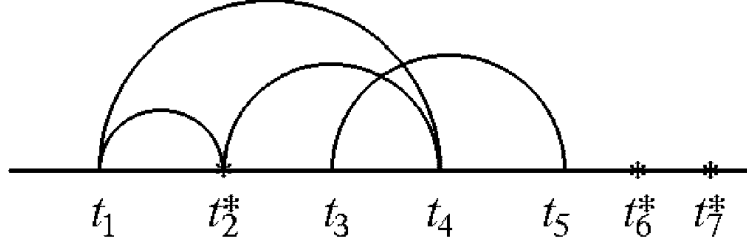
1.2.1. Le cas où d est impair

On fixe une (A, b) -configuration. Considérons une superalgèbre de Lie libre avec un crochet pair sur les générateurs impairs de type $x_{t_\alpha}, x_{t_\beta^*}$, où $t_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}$, (resp. $t_\beta^*, \beta \in \mathcal{B}$), sont tous les points sur \mathbb{R} de notre (A, b) -configuration, dans lesquels il n'y a pas d'astérisques (resp. il y en a)). On va prendre l'algèbre symétrique (dans le supersens) de l'espace de cette superalgèbre de Lie. Dans l'espace obtenu nous considérerons un sous-espace engendré par les produits de crochets, où chaque composante minimale de notre (A, b) -

configuration (voir la Définition 1.1.3) est présentée par un seul crochet tel, que tous les générateurs correspondant aux points de cette composante y sont également présentés exactement une fois. De tels produits de crochets seront appelés **-diagrammes de crochets* ou bien *B_{*}-diagrammes*.

Exemple 1.2.1. Pour la (A, b) -configuration de la Figure 1.2.2 on peut prendre le diagramme

$$[[x_{t_1}, x_{t_2}^*]x_{t_4}] \cdot [x_{t_3}x_{t_5}] \cdot x_{t_6}^* \cdot x_{t_7}^*. \quad \square$$



(Figure 1.2.2)

Les B_* -diagrammes correspondant aux A -configurations seront appelés simplement *diagrammes de crochets* ou *B-diagrammes*.

Deux $(*)$ -diagrammes qui sont obtenus l'un de l'autre par un homéomorphisme $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, qui conserve l'orientation, sont considérés comme égaux.

Exemple 1.2.3. Considérons les A -configurations, dont toutes les composantes minimales se composent de deux points (c'est exactement les (A, b) -configurations qui donnent le nombre maximal $(= 2i)$ des points géométriquement distincts pour une complexité fixée i). Les diagrammes de crochets, qui leur sont soumis, sont des produits de crochets de type $[x_{t_1}, x_{t_2}]$. De tels diagrammes seront appelés *diagrammes de cordes*, parce que l'on peut les voir comme $2i$ points sur la droite, décomposés en i couples et joints par des cordes en dedans de toute couple. Notons que ni l'orientation de ces cordes ni leur ordonnancement ne comptent, puisque $[x_{t_1}, x_{t_2}] = [x_{t_2}, x_{t_1}]$ et que ces crochets sont toujours pairs: $[x_{t_1}, x_{t_2}] \cdot [x_{t_3}, x_{t_4}] = [x_{t_3}, x_{t_4}] \cdot [x_{t_1}, x_{t_2}]$. \square

Les B_* -diagrammes (B -diagrammes), que l'on peut construire de la même façon pour les (A, b) -configurations (resp. A -configurations) généralisées, seront appelés B_* -diagrammes (B -diagrammes) *généralisés*.

Exemple 1.2.4. Tout B_* -diagramme est un B_* -diagramme généralisé. \square

Exemple 1.2.5. $[x_{t_1}, x_{t_2}] \cdot x_{t_3}$ est un B -diagramme généralisé. \square

1.2.2. Le cas où d est pair

Fixons une (A, b) -configuration et considérons une superalgèbre de Lie libre avec un crochet pair sur les générateurs pairs de type x_{t_α} et les générateurs impairs de type $x_{t_\beta}^*$, où $t_\alpha, t_\beta^*, \alpha \in \mathcal{A}, \beta \in \mathcal{B}$, sont tous les points de notre (A, b) -configuration. Prenons l'algèbre extérieure (dans le supersens) de l'espace de cette algèbre de Lie. Dans l'espace obtenu on peut considérer le sous-espace linéairement engendré par les produits analogues (voir la section 1.2.1). De tels produits de crochets seront également appelés B_* -diagrammes (**-diagrammes de crochets*) et B -diagrammes (*diagrammes de crochets*).

Exemple 1.2.6. Pour la (A, b) -configuration de la Figure 1.2.2 on peut prendre le

diagramme

$$[[x_{t_1}x_{t_2}^*]x_{t_4}] \wedge [x_{t_3}x_{t_5}] \wedge x_{t_6}^* \wedge x_{t_7}^*. \quad \square$$

Exemple 1.2.7. Pour d pair les diagrammes, qui correspondent à l'Exemple 1.2.3, seront appelés *superdiagrammes de cordes*. Pour orienter tel diagramme il va importer l'orientation de ses cordes (comme $[x_{t_1}, x_{t_2}] = -[x_{t_2}, x_{t_1}]$) aussi bien que leur ordonnancement (comme $[x_{t_1}, x_{t_2}] \wedge [x_{t_3}, x_{t_4}] = -[x_{t_3}, x_{t_4}] \wedge [x_{t_1}, x_{t_2}]$) . \square

Remarque 1.2.8. Il existe une autre manière de définir les B_* -diagrammes pour d pair, qui donne la même chose. On prend la superalgèbre de Lie libre avec un crochet impair sur les générateurs impairs x_{t_α} , $\alpha \in \alpha$, et les générateurs pairs x_{t_β} , $\beta \in \beta$. Ensuite on considère l'algèbre symétrique (dans le supersens) de l'espace de cette superalgèbre de Lie et on prend les produits (diagrammes) analogues. \square

Par analogie (voir la section 1.2.1) on définit l'espace des B_* -diagrammes (B -diagrammes) généralisés pour d pair.

1.3. La différentielle des complexes $CBD^{odd(even)}$, $CB_*D^{odd(even)}$ des $(*)$ -diagrammes de crochets

1.3.0. Considérations générales

Les espaces des B_*/B -diagrammes ont une bigraduation naturelle. La première graduation est la complexité i des (A, b) -configurations correspondantes. Le nombre i indique l'homologie de quel terme $\sigma_i \backslash \sigma_{i-1}$ de la filtration (0.1.2) est calculée. L'autre graduation est le nombre j des points géométriquement différents des (A, b) -configurations. La différentielle sera de bidegré (0,1). On va également associer un poids p aux diagrammes:

$$p := i(d-1) - j.$$

Selon les conjectures 0.1.3, 0.1.4 le complexe, que l'on va définir, devra calculer l'homologie (sur \mathbb{Q}) de l'espace des nœuds. Le poids p indique le degré de l'homologie calculée.

Les formules (1.3.13), (1.3.7), (1.3.10), (1.3.28), (1.3.31) données ci-dessous s'interprète géométriquement: elles décrivent le cobord des strates de type (1.1.1) parmi les strates de la même complexité i .

1.3.1. Le cas où d est impair

Soit \mathfrak{g} une superalgèbre de Lie munie d'un crochet pair:

$$[.,.] : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \quad (1.3.1)$$

Le crochet $[.,.]$ admet une extension à l'algèbre symétrique $S^*\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=0}^{+\infty} S^i\mathfrak{g}$, que l'on appelle le *crochet de Poisson*.

Soit $A, B \in S^*\mathfrak{g}$, où $A = A_1 \cdot A_2 \dots A_k$, $B = B_1 \cdot B_2 \dots B_\ell$, $A_i, B_j \in \mathfrak{g}$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq \ell$, sont des éléments purs. On définit

$$[A, B] := \sum_{i,j} (-1)^{\lambda_{ij}} A_1 \dots \hat{A}_i \dots A_k \cdot [A_i, B_j] \cdot B_1 \dots \dots \hat{B}_j \dots \dots B_\ell, \quad (1.3.2)$$

où le chapeau sur un élément signifie que ce dernier est omis;

$$\lambda_{ij} = \tilde{A}_i \left(\sum_{p=i+1}^k \tilde{A}_p \right) + \tilde{B}_j \left(\sum_{q=1}^{j-1} \tilde{B}_q \right). \quad (1.3.3)$$

Le trait ondulé sur un élément veut dire que l'on prend sa parité.

Maintenant retournons à l'espace des $(*)$ -diagrammes de crochets. Soient A et B deux $(*)$ -diagrammes de crochets, qui n'ont pas de points communs sur la droite \mathbb{R} . Alors on peut aussi définir par la formule (1.3.2) un élément $[A, B]$ de l'espace des $(*)$ -diagrammes de crochets.

Définition 1.3.4. On dit qu'une (A, b) -configuration J peut être *insérée* en un point t_0 ou t_0^* (le signe “ $*$ ” indique le fait, que ce point contient un astérisque) d'une (A', b') -configuration J' , si J n'a pas de points communs avec J' à l'exception possible du point $t_0^{(*)}$. \square

Définition 1.3.5. On dit qu'un diagramme peut être *inséré* en un point $t_0^{(*)}$ d'un autre diagramme, si c'est vrai pour leurs (A, b) -configurations. \square

Soient A et B deux $(*)$ -diagrammes généralisés tels, que A puisse être inséré en un point t_0 (ou t_0^*) de B . On va définir un élément $B|_{x_{t_0}=A}$ (resp. $B|_{x_{t_0^*}=A}$) de l'espace des $B_{(*)}$ -diagrammes généralisés. Au signe près $B|_{x_{t_0^{(*)}}=A}$ est défini par le remplacement formel de $x_{t_0^{(*)}}$ par A (dans l'écriture de B). Le signe est défini comme $(-1)^{(\tilde{A}-1) \times n}$, où n est le nombre des générateurs de type $x_{t_\alpha}, x_{t_\beta^*}$ avant $x_{t_0^{(*)}}$ dans l'écriture de B . En d'autres termes: On fait passer la composante minimale contenant $x_{t_0^{(*)}}$ à la première place, ensuite à l'aide des relations de superantisymétrie on met $x_{t_0^{(*)}}$ à la première place dans son crochet (et par conséquent dans l'écriture de B); remplaçons $x_{t_0^{(*)}}$ par B ; et on fait toutes ces manipulations dans l'ordre inverse. Il est facile de voir que l'on obtient exactement le signe, que l'on vient de définir.

Exemple 1.3.6.

$$[x_{t_2} x_{t_3^*}] \cdot [x_{t_1^*} x_{t_0}] |_{x_{t_0}=[x_{t_4} x_{t_5}] \cdot x_{t_6^*}} = (-1)^{(3-1) \cdot 3} [x_{t_2} x_{t_3^*}] \cdot [x_{t_1^*}, [x_{t_4} x_{t_5}] \cdot x_{t_6^*}]. \quad \square$$

Soient A un $B_{(*)}$ -diagramme non-généralisé, t_α l'un de ses points simples (=sans astérisque), alors on définit

$$\partial_{t_\alpha} A := P(A|_{x_{t_\alpha}=x_{t_{\alpha-}} \cdot x_{t_{\alpha+}}}), \quad (1.3.7)$$

où P est la projection naturelle de l'espace des $B_{(*)}$ -diagrammes généralisés sur l'espace des $B_{(*)}$ -diagrammes, qui envoie en zéro tous les diagrammes ayant points simples isolés; on définit $t_{\alpha \pm} \text{part}_\alpha \pm \epsilon$ pour un très petit $\epsilon > 0$.

Remarque 1.3.8. La formule (1.3.7) peut être présisée:

$$\partial_{t_\alpha} A + (x_{t_{\alpha-}} - x_{t_{\alpha+}}) \cdot A = A|_{x_{t_\alpha}=x_{t_{\alpha-}} \cdot x_{t_{\alpha+}}}. \quad \square \quad (1.3.9)$$

Soit t_β^* l'un des points de A (ayant un astérisque), alors on définit

$$\partial_{t_\beta^*} A := P(A|_{x_{t_\beta^*}=x_{t_{\beta-}} \cdot x_{t_{\beta+}^*} + x_{t_{\beta-}^*} \cdot x_{t_{\beta+}} + [x_{t_{\beta-}}, x_{t_{\beta+}}]}), \quad (1.3.10)$$

où P est la même projection; $t_{\beta \pm}^{(*)} := t_\beta^* \pm \epsilon$.

Remarque 1.3.11. La formule (1.3.10) peut être précisée:

$$\partial_{t_\beta^*} A + (x_{t_{\beta+}} - x_{t_{\beta+}^*}) \cdot A = A|_{x_{t_\beta^*}=x_{t_{\beta-}} \cdot x_{t_{\beta+}^*} + x_{t_{\beta-}^*} \cdot x_{t_{\beta+}} + [x_{t_{\beta-}}, x_{t_{\beta+}}]}. \quad \square \quad (1.3.12)$$

La différentielle ∂ sur l'espace des $B_{(*)}$ -diagrammes sera définie comme une somme des opérateurs ∂_{t_α} et $\partial_{t_\beta^*}$ par tous les points t_α, t_β^* de la (A, b) -configuration correspondante:

$$\partial = \sum_{\alpha \in \alpha} \partial_{t_\alpha} + \sum_{\beta \in \beta} \partial_{t_\beta^*}. \quad (1.3.13)$$

Il est facile de voir, que $\partial^2 = 0$.

Le complexe des B_* -diagrammes (ainsi obtenus) est désigné par $CB_*D^{odd}(\mathbb{k})$, où \mathbb{k} est un anneau commutatif de coefficients. L'espace des B -diagrammes définit un sous-complexe de $CB_*D^{odd}(\mathbb{k})$, qui sera désigné par $CBD^{odd}(\mathbb{k})$.

Remarque 1.3.14.

$$\partial A = \left(\sum_{\alpha \in \alpha} A|_{x_{t_\alpha} = x_{t_{\alpha-}} \cdot x_{t_{\alpha+}}} \right) + \left(\sum_{\beta \in \beta} A|_{x_{t_\beta}^* = x_{t_{\beta-}} \cdot x_{t_{\beta+}}^* + x_{t_{\beta-}}^* \cdot x_{t_{\beta+}} + [x_{t_{\beta-}}, x_{t_{\beta+}}]} \right) - (x_{t_-} - x_{t_+}) \cdot A, \quad (1.3.15)$$

où t_+ (resp. t_-) est un point supérieur (resp. inférieur) à tous les points de A . \square

Définissons également le complexe des B_* -diagrammes (resp. B -diagrammes) généralisés en prenant la différentielle ∂ selon la formule (1.3.15). On a une inclusion de $CB_*D^{odd}(\mathbb{k})$ (resp. $CBD^{odd}(\mathbb{k})$) dans le complexe ainsi défini.

Affirmation 1.3.16.[T] *Pour d impair l'inclusion du complexe des $B_{(*)}$ -diagrammes dans le complexe des $B_{(*)}$ -diagrammes généralisés induit un isomorphisme en homologie.* \square

Démonstration de 1.3.16: Considérons une filtration décroissante dans le complexe des $B_{(*)}$ -diagrammes généralisés par le nombre des points isolés sans astérisques. Il est facile de voir, que ce complexe est une somme directe de $CB_{(*)}D^{odd}(\mathbb{k})$ et du premier terme de cette filtration. On peut démontrer, que le deuxième morceau de cette somme est acyclique (voir [T]). \square

Exemple 1.3.17. Considérons le complexe $CB_*D^{odd}(\mathbb{k})$. C'est clair que tous les diagrammes de cordes (voir l'Exemple 1.2.3) sont dans le noyau de la différentielle. Pour trouver les groupes d'homologie dans les bigraduations $(i, 2i)$ il faut quotienter l'espace de tous les diagrammes de cordes par les relations, qui sont l'image de la différentielle des diagrammes, dont toutes les composantes minimales, sauf une seule, sont des cordes; celle qui ne l'est pas est un astérisque isolé ou bien un crochet sur 3 points sans astérisques. Mentionnons que $\partial_{t_\beta}^* x_{t_\beta}^* = [x_{t_{\beta-}}, x_{t_{\beta+}}]$. Le cas d'un astérisque isolé donne les dites *relations d'un terme* (voir la Figure 1.3.18).

(Figure 1.3.18)

Sur les lignes en pointillés il peut y avoir les bases d'autres cordes. Autrement dit nous quotientons par les diagrammes de cordes ayant une corde joignant deux points voisins. Les calculs faciles de $(\partial_{t_1} + \partial_{t_2} + \partial_{t_3})([[x_{t_1}x_{t_2}]x_{t_3}])$ donnent les dites *relations de quatre termes* (voir la Figure 1.3.19). \square

(Figure 1.3.19)

L'ordre des points t_1, t_2, t_3 sur la droite peut est arbitraire. On met en pointillés les segments de la droite, où il peut y avoir les bases des autres cordes. (Les autres cordes sont toujours les mêmes pour tous les quatre diagrammes.)

Exemple 1.3.20. L'homologie de $CBD^{odd}(\mathbb{k})$ dans les bidegrés $(i, 2i)$ est l'espace des diagrammes de cordes quotienté seulement par les relations de quatre termes. \square

1.3.2. Le cas où d est pair

Soit \mathfrak{g} une superalgèbre de Lie munie d'un crochet pair:

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}. \quad (1.3.21)$$

Le crochet $[\cdot, \cdot]$ admet une extension sur l'algèbre extérieure $\Lambda^* \mathfrak{g} = \bigoplus_{i=0}^{+\infty} \Lambda^i \mathfrak{g}$, que l'on appelle le *crochet de Schouten*.

Soient $A = A_1 \wedge \cdots \wedge A_k \in \Lambda^k \mathfrak{g}$, $B = B_1 \wedge \cdots \wedge B_\ell \in \Lambda^\ell \mathfrak{g}$. On définit

$$[A, B] := \sum_{i,j} (-1)^{\lambda_{ij}} A_1 \wedge \cdots \wedge \hat{A}_i \wedge \cdots \wedge A_k \wedge [A_i, B_j] \wedge B_1 \wedge \cdots \wedge \hat{B}_j \wedge \cdots \wedge B_\ell, \quad (1.3.22)$$

$$\text{où } \lambda_{ij} = (\tilde{A}_i + 1) \left(\sum_{p=i+1}^k (\tilde{A}_p + 1) \right) + (\tilde{B}_j + 1) \left(\sum_{q=1}^{j-1} (\tilde{B}_q + 1) \right).$$

Il est facile de voir, que (1.3.22) définit correctement une application

$$[\cdot, \cdot] : \Lambda^* \mathfrak{g} \otimes \Lambda^* \mathfrak{g} \rightarrow \Lambda^* \mathfrak{g}. \quad (1.3.23)$$

Pour tout monôme de $\Lambda^* \mathfrak{g}$ nous définissons sa parité comme la somme des parités de ses facteurs plus le nombre des signes de produit extérieur. Par exemple, pour $A = A_1 \wedge \cdots \wedge A_k$

$$\tilde{A} = \tilde{A}_1 + \cdots + \tilde{A}_k + k - 1. \quad (1.3.24)$$

Evidemment

$$A \wedge B = (-1)^{(\tilde{A}+1)(\tilde{B}+1)} B \wedge A, \quad (1.3.25)$$

$$[A, B] = -(-1)^{\tilde{A}\tilde{B}} [B, A]. \quad (1.3.26)$$

Si $C = [A, B]$, alors $\tilde{C} = \tilde{A} + \tilde{B}$; si $C = A \wedge B$, alors $\tilde{C} = \tilde{A} + \tilde{B} + 1$.

Maintenant retournons à l'espace des $(*)$ -diagrammes de crochets (pour le cas où d est pair).

Soient $A = A_1 \wedge \cdots \wedge A_k$, $B = B_1 \wedge \cdots \wedge B_\ell$ deux $(*)$ -diagrammes de crochets, qui n'ont pas de points communs sur \mathbb{R} , A_i, B_j sont des crochets des générateurs pairs de type x_{t_α} et des générateurs impairs de type $x_{t_\beta^*}$. Définissons $[A, B]$ selon la formule (1.3.22).

Notons que la parité des diagrammes définie par (1.3.24) est exactement opposée à la parité du poids des diagrammes (contrairement au cas où d est impair).

Soient A et B deux $B_{(*)}$ -diagrammes généralisés, tels que A peut être inséré dans un point $t_0^{(*)}$ de B . Définissons $B|_{x_{t_0^{(*)}}=A}$. Pour cela on remplace $x_{t_0^{(*)}}$ par A dans l'écriture de B , et on multiplie l'élément ainsi obtenu par $(-1)^{(\tilde{A}-\epsilon_0) \times (n_1+n_2)}$, où ϵ_0 égale 0, s'il n'y a pas d'astérisque dans t_0 , et égale 1, s'il y a un astérisque dans t_0^* , n_1 (resp. n_2) est le nombre des signes de produit extérieur (resp. des générateurs avec des astérisques) avant $x_{t_0^{(*)}}$ dans l'écriture de B .

Exemple 1.3.27.

$$[x_{t_2}x_{t_3}] \wedge [x_{t_1}^*x_{t_0}]|_{x_{t_0}=[x_{t_4}x_{t_5}] \wedge x_{t_6}^*} = (-1)^{(2-0) \cdot (1+2)} [x_{t_2}x_{t_3}] \wedge [x_{t_1}^*, [x_{t_4}x_{t_5}] \wedge x_{t_6}^*]. \quad \square$$

Soient A un $B_{(*)}$ -diagramme, t_α l'un de ses points (simples), alors définissons

$$\partial_{t_\alpha} A := P \left(A|_{x_{t_\alpha}=x_{t_{\alpha-}} \wedge x_{t_{\alpha+}}} \right), \quad (1.3.28)$$

où P est une projection analogue (à celle de (1.3.6)).

Remarque 1.3.29. La formule (1.3.28) peut être précisée:

$$\partial_{t_\alpha} A + (x_{t_{\alpha-}} - x_{t_{\alpha+}}) \wedge A = A|_{x_{t_\alpha}=x_{t_{\alpha-}} \wedge x_{t_{\alpha+}}}. \quad \square \quad (1.3.30)$$

Soit t_β^* l'un des points de A (ayant un astérisque), alors on définit

$$\partial_{t_\beta^*} A := P \left(A|_{x_{t_\beta^*}=x_{t_{\beta-}} \wedge x_{t_{\beta+}}^* - x_{t_{\beta-}}^* \wedge x_{t_{\beta+}} - [x_{t_{\beta-}}, x_{t_{\beta+}}]} \right). \quad \square \quad (1.3.31)$$

Remarque 1.3.32. La formule (1.3.31) peut être précisée:

$$\partial_{t_\beta^*} A + (x_{t_{\beta-}} - x_{t_{\beta+}}) \wedge A = A|_{x_{t_\beta^*}=x_{t_{\beta-}} \wedge x_{t_{\beta+}}^* - x_{t_{\beta-}}^* \wedge x_{t_{\beta+}} - [x_{t_{\beta-}}, x_{t_{\beta+}}]}. \quad \square \quad (1.3.33)$$

D'une manière analogue au cas où d est impair on définit l'opérateur ∂ . L'espace des $B_{(*)}$ -diagrammes avec la différentielle ∂ est appelé le *complexe des $B_{(*)}$ -diagrammes* et est désigné par $CB_*D^{even}(\mathbb{k})$, $CBD^{even}(\mathbb{k})$. L'espace des $B_{(*)}$ -diagrammes généralisés avec la différentielle ∂ est appelé le *complexe des $B_{(*)}$ -diagrammes généralisés*.

Affirmation 1.3.34.[T] *Pour d pair l'inclusion naturelle de $CB_{(*)}D^{even}(\mathbb{k})$ dans le complexe des $B_{(*)}$ -diagrammes généralisés induit un isomorphisme en homologie.* \square

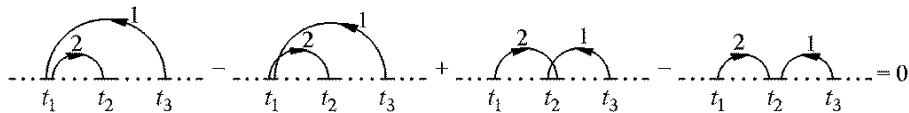
Démonstration de 1.3.34: analogue à celle de 1.3.16. \square

Remarque 1.3.35.

$$\partial A = \left(\sum_{\alpha \in \alpha} A|_{x_{t_\alpha}=x_{t_{\alpha-}} \wedge x_{t_{\alpha+}}} \right) + \left(\sum_{\beta \in \beta} A|_{x_{t_\beta^*}=x_{t_{\beta-}} \wedge x_{t_{\beta+}}^* - x_{t_{\beta-}}^* \wedge x_{t_{\beta+}} - [x_{t_{\beta-}}, x_{t_{\beta+}}]} \right) - (x_{t_-} - x_{t_+}) \wedge A.$$

\square

Exemple 1.3.36. L'homologie des complexes $CB_*D^{even}(\mathbb{k})$, $CBD^{even}(\mathbb{k})$ dans les bigraduations $(i, 2i)$ est un espace des superdiagrammes de cordes (voir l'Exemple 1.2.7) quotienté par les relations de quatre termes (voir la Figure 1.3.37) et (dans le cas de $CB_*D^{even}(\mathbb{k})$ seulement) par les relations d'un terme. \square



(Figure 1.3.37)

L'ordre des points t_1, t_2, t_3 peut être arbitraire. Les nombres 1 et 2 au-dessus des cordes désignent l'ordre dans lequel on prend les cordes correspondantes. Les autres cordes et leur ordre sont les mêmes pour tous les quatre diagrammes.

1.4. Simplification des calculs de l'homologie de $CB_*D^{odd(even)}(\mathbb{k})$. Les complexes $CB_0D^{odd(even)}(\mathbb{k})$ des B_0 -diagrammes

Considérons l'espace des B -diagrammes (pour d pair ou impair). On va le quotienter par les relations de “supercommutativité voisine”, plus précisément aux relations habituelles de superantisymétrie et celles de Jacobi on ajoute la supercommutabilité des générateurs correspondant aux points voisins sur la droite \mathbb{R} dans les diagrammes. L'espace ainsi obtenu sera appelé *l'espace des B_0 -diagrammes* (ou bien *l'espace des 0-diagrammes de crochets*). L'espace des B_0 -diagrammes possède une structure de complexe-quotient de $CBD^{odd(even)}(\mathbb{k})$ et de $CB_*D^{odd(even)}(\mathbb{k})$ (dans le deuxième cas on envoie en zéro tous les diagrammes ayant des astérisques), que l'on appelle le *complexe des B_0 -diagrammes* et qui est désigné par $CB_0D^{odd(even)}(\mathbb{k})$.

On a un diagramme commutatif des morphismes de complexes:

$$\begin{array}{ccc} CB_0D^{odd(even)}(\mathbb{k}) & \xleftarrow{p_1} & CBD^{odd(even)}(\mathbb{k}) \\ & p_2 \searrow \swarrow i_1 & \\ & CB_*D^{odd(even)}(\mathbb{k}) & \end{array} \quad (1.4.1)$$

où p_1, p_2 sont projectifs; i_1 est injectif.

Théorème 1.4.2.[T] *L'espace des B_0 -diagrammes (sur n'importe quel anneau commutatif \mathbb{k} de coefficients) est un \mathbb{k} -module libre (autrement dit, ce, que l'on quotiente, ne donne pas de torsions). La surjection p_2 de (1.4.1) induit un isomorphisme en homologie.*

□

Idée de la démonstration: Il faut considérer la filtration par le nombre des composantes minimales dans le complexe dual à $CB_*D^{odd(even)}(\mathbb{k})$ et la suite spectrale associée à cette filtration. Cette suite dégénère au deuxième terme, parce que son premier terme se trouve dans une seule ligne, qui répond aux diagrammes sans astérisques. Pour les détails voir [T]. □

2. Sur six algèbres de Hopf différentielles liées aux discriminants des espaces de nœuds non-compacts

2.1. Sur les algèbres de Hopf (différentielles)

Soit $(B, \mu, \iota, \Delta, \epsilon)$ une bigèbre, où B est un module \mathbb{Z}_2 -gradué sur un anneau commutatif \mathbb{k} ; $\mu, \iota, \Delta, \epsilon$ sont respectivement les application de la multiplication, de l'unité, de la comultiplication, de la counité.

Sur l'espace \mathbb{Z}_2 -gradué $Mor(B, B)$ de toutes les applications linéaires de B dans B on a une structure d'algèbre associative en définissant la multiplication \star par la formule

$$f \star g := \mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta. \quad (2.1.1)$$

L'unité de cette algèbre est

$$\mathbb{1} = \iota \circ \epsilon. \quad (2.1.2)$$

Soit $S \in Mor(B, B)$ tel, que

$$S \star id = id \star S = \mathbb{1}, \quad (2.1.3)$$

alors S est appelé *antipode*. Evidemment, s'il existe, il est unique. Tout tel sextuplet $(B, \mu, \iota, \Delta, \epsilon, S)$ est appelé *algèbre de Hopf*.

Rappelons qu'une *algèbre de Hopf différentielle* $(H, \mu, \iota, \Delta, \epsilon, S, \partial)$ est une algèbre de Hopf $(H, \mu, \iota, \Delta, \epsilon, S)$ sur laquelle agit une application impaire $\partial \in \text{Mor}(B, B)$, vérifiant $\partial^2 = 0$ et compatible avec les applications de structure $\mu, \iota, \Delta, \epsilon, S$.

De la même façon on définit bigèbre, algèbre, coalgèbre différentielles.

L'homologie (par rapport à la différentielle ∂) d'une algèbre différentielle sur n'importe quel anneau commutatif \mathbb{k} forme également une algèbre. L'homologie d'une coalgèbre différentielle peut ne pas être une coalgèbre, si l'anneau principal n'est pas un corps. De la même façon l'homologie d'une bigèbre (algèbre de Hopf) différentielle sera considérée comme une bigèbre (algèbre de Hopf), si l'anneau principal est un corps, et simplement comme une algèbre, s'il ne l'est pas.

Définition 2.1.4. Une bigèbre non-négativement \mathbb{Z} -graduée est dite *connexe*, si son espace de degré 0 est engendré par un seul élément non-nul (ce qui revient à dire qu'il est isomorphe à un anneau-quotient de l'anneau principal \mathbb{k}). \square

Pour toute bigèbre connexe B les opérateurs de la forme

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (id - \mathbb{1})^{\star k}, \quad (2.1.5)$$

(où $(id - \mathbb{1})^{\star k} = \underbrace{(id - \mathbb{1}) \star (id - \mathbb{1}) \star \cdots \star (id - \mathbb{1})}_k$; $a_k \in \mathbb{k}$, $k = 0, 1, 2, \dots$) sont correctement définis, parce que pour tout élément $x \in B$ on a $(id - \mathbb{1})^{\star k} x = 0$, si k est supérieur au degré de x .

Soit $f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (t - 1)^k$ la fonction génératrice d'une suite $\{a_k\}$. Définissons

$$f_{\star}(id) := \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (id - \mathbb{1})^{\star k}. \quad (2.1.6)$$

Lemme 2.1.7. Soit $(B, \mu, \iota, \Delta, \epsilon, \partial)$ une bigèbre différentielle, soient $f, g \in \text{Mor}(B, B)$ des opérateurs compatibles avec la différentielle ∂ (supercommutant avec elle), alors $f \star g$ est également compatible avec ∂ . \square

Démonstration du Lemme 2.1.7: C'est une conséquence du fait que μ, Δ, f, g sont compatibles avec ∂ . \square

Conséquence du Lemme 2.1.7. Tout opérateur de la forme (2.1.5) dans une bigèbre différentielle connexe est toujours compatible avec la différentielle. \square

Théorème 2.1.8. Toute bigèbre (différentielle) connexe sur n'importe quel anneau commutatif \mathbb{k} est une algèbre de Hopf (différentielle). L'antipode S est donné par la formule suivante:

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (id - \mathbb{1})^{\star k}. \quad (2.1.9)$$

Démonstration du Théorème 2.1.8: Evident. \square

Théorème 2.1.10.[P] Toute bigèbre différentielle supercocommutative connexe sur un corps de caractéristique nulle est isomorphe comme algèbre de Hopf différentielle à l'algèbre enveloppante de la superalgèbre de Lie différentielle de ses éléments primitifs. L'opérateur

$$P_1 = \log_{\star} id \quad (2.1.11)$$

est une projection sur l'espace des éléments primitifs. L'homologie de telle algèbre de Hopf différentielle est l'algèbre de Hopf enveloppante de l'homologie de la superalgèbre de Lie différentielle en question. \square

2.2. Six algèbres de Hopf différentielles $DHAB_*D^{odd}$, $DHAB_*D^{even}$, $DHAB_0D^{odd}$, $DHAB_0D^{even}$, $DHABD^{odd}$, $DHABD^{even}$ des $(*/0)$ -diagrammes de crochets

Considérons les complexes $CB_*D^{odd(even)}(\mathbb{k})$, $CB_0D^{odd(even)}(\mathbb{k})$, $CBD^{odd(even)}(\mathbb{k})$ des $(*/0)$ -diagrammes de crochets. Ces complexes sont bigradués par la complexité i et par le nombre des points géométriquement différents. La différentielle ∂ est de bidegré $(0,1)$.

On va construire les opérations $\mu, \iota, \Delta, \epsilon, S$ de multiplication, unité, comultiplication, counité, antipode, qui vont définir avec ∂ une structure d'algèbre de Hopf différentielle bigraduée sur ces espaces. Ces algèbres de Hopf différentielles seront appelées respectivement $DHAB_*D^{odd(even)}(\mathbb{k})$, $DHAB_0D^{odd(even)}(\mathbb{k})$, $DHABD^{odd(even)}(\mathbb{k})$ (de l'anglais “**D**ifferential **H**opf **A**lgebra of **B**racket **D**iagrams”).

Définissons $\iota : \mathbb{k} \rightarrow DHAB_xD^{odd(even)}(\mathbb{k})$ en prenant $\iota(1)$ égale le diagramme trivial (ici et plus loin x signifie soit $*$, soit 0 , soit \emptyset).

Définissons ϵ comme zéro sur tous les diagrammes sauf celui qui est trivial. ϵ du diagramme trivial est défini comme 1.

Notons que ι, ϵ sont les isomorphismes entre l'anneau \mathbb{k} et le module de bidegré $(0,0)$. Donc ι, ϵ respectent la bigraduation. Evidemment ils respectent également la différentielle ∂ , puisque la différentielle ∂ du diagramme trivial est nulle.

Définissons la multiplication μ . Le produit de deux diagrammes D_1 et D_2 est défini comme un diagramme $D_1 * D_2 = \mu(D_1 \otimes D_2)$ sur la droite \mathbb{R} , que l'on obtient en collant le diagramme D_2 à droite du diagramme D_1 (voir la Figure 2.2.1).

(Figure 2.2.1)

De la même façon on obtient l'écriture en crochets de $D_1 * D_2$ en ajoutant à droite de l'écriture de D_1 celle de D_2 .

Exemple 2.2.2. $([x_{t_1}, x_{t_2}] \wedge [x_{t_3}, x_{t_4}^*]) \star [x_{t_1}, [x_{t_2}, x_{t_3}]] = [x_{t_1}, x_{t_2}] \wedge [x_{t_3}, x_{t_4}^*] \wedge [x_{t_1+N}, [x_{t_2+N}, x_{t_3+N}]]$ pour un très grand $N > 0$. \square

Définissons la comultiplication Δ . Soit D un $(*/0)$ -diagramme de crochets, soit $V = V(D)$ l'ensemble de ses composantes minimales. Tout sous-ensemble $V_1 \subset V$ de composantes minimales du diagramme D définit un diagramme (V_1) , qui ne se compose que des composantes minimales de V_1 (on efface tous les crochets dans l'écriture de $D = (V)$ qui correspondent aux composantes minimales, qui ne sont pas de V_1).

On définit Δ en prenant

$$\Delta((V)) = \sum_{V=V_1 \sqcup V_2} \pm(V_1) \otimes (V_2). \quad (2.2.3)$$

Le signe \pm dans (2.2.3) peut être précisé facilement: il apparaît, quand on fait passer à droite les composantes minimales de V_2 dans l'écriture de D .

Il est facile de voir, que la comultiplication est supercocommutative.

On peut démontrer, que les opérations $\mu, \iota, \Delta, \epsilon, \partial$ font de $CB_xD^{odd(even)}$ une bigèbre différentielle connexe (voir la Définition 2.1.4) \mathbb{Z} -bigraduée. Cela veut dire (voir le

Théorème 2.1.8), qu'elle est en fait une algèbre de Hopf différentielle (il y existe un antipode S).

Définition 2.2.4. Un intervalle de \mathbb{R} joignant deux points voisins d'une (A, b) -configuration est dit *séparant* pour elle, si toute composante minimale de cette (A, b) -configuration est soit strictement à gauche, soit strictement à droite par rapport à cet intervalle-là. \square

Définition 2.2.5. En éliminant tous les intervalles séparants dans la droite \mathbb{R} , on obtient une décomposition de notre (A, b) -configuration en *composantes connexes*, qui répondent aux secteurs connexes de la droite sans ces intervalles. \square

Une composante connexe peut contenir plusieurs composantes minimales.

Exemple 2.2.6. La (A, b) -configuration de la Figure 1.2.2 a 4 composantes minimales et 3 composantes connexes. \square

Considérons l'espace \mathcal{P} engendré par les diagrammes de $DHAB_x D^{odd(even)}(\mathbb{k})$ n'ayant qu'une seule composante connexe. Il est facile de voir que l'algèbre $DHAB_x D^{odd(even)}(\mathbb{k})$ est l'algèbre libre tensorielle $T^*(\mathcal{P})$ de l'espace \mathcal{P} . Soit \mathbb{k} un corps de caractéristique nulle, alors on a une projection $P_1 = \log_* id$ sur l'espace des éléments primitifs (voir le Théorème 2.1.10). Il est clair que $\ker P_1|_{\mathcal{P}} = 0$. On en déduit que l'algèbre $DHAB_x D^{odd(even)}(\mathbb{k})$ est isomorphe à $T^*(P_1(\mathcal{P}))$. Cela veut dire que l'algèbre de Hopf $DHAB_x D^{odd(even)}(\mathbb{k})$ est isomorphe à l'algèbre de Hopf libre d'un certain ensemble infini de générateurs pairs et impairs primitifs \mathbb{Z} -bigradués, ou bien encore $DHAB_x D^{odd(even)}(\mathbb{k})$ est l'algèbre enveloppante d'une superalgèbre de Lie libre d'un ensemble infini de générateurs pairs et impairs \mathbb{Z} -bigradués. D'après le Théorème 2.1.10 l'algèbre de Hopf de l'homologie de $DHAB_x D^{odd(even)}(\mathbb{k})$ doit être l'algèbre enveloppante d'une superalgèbre de Lie bigraduée. Il se trouve que les quatre superalgèbres de Lie ainsi obtenues sont toutes supercommutatives (ont un crochet trivial).

Notons que les morphismes i_1, p_1, p_2 du diagramme (1.4.1) sont aussi des morphismes des algèbres de Hopf différentielles. On a donc le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} DHAB_0 D^{odd(even)}(\mathbb{k}) & \xleftarrow{p_1} & DHAB D^{odd(even)}(\mathbb{k}) \\ & \nwarrow p_2 \quad \nearrow i_1 & \\ & DHAB_* D^{odd(even)}(\mathbb{k}) & \end{array} \quad (2.2.7)$$

L'application p_2 induit un isomorphisme en homologie.

2.3. Conjectures sur la multiplication et la comultiplication dans la (co)homologie des espaces de nœuds non-compacts

Un espace topologique X sera appelé *H-espace*, s'il est muni d'une multiplication homotopiquement associative

$$m : X \times X \rightarrow X, \quad (2.3.1)$$

et s'il a un élément $e \in X$, qui est une unité homotopique par rapport à m . L'existence d'une application homotopiquement inverse n'est pas demandée.

Il est facile de voir, que l'homologie et la cohomologie sur un corps de tout *H-espace* forment des bigèbres respectivement supercocommutative et supercommutative, qui sont duales l'une à l'autre. Si notre *H-espace* est connexe par arcs ou bien si l'on peut définir pour lui une application homotopiquement inverse, alors ces bigèbres sont en fait des algèbres de Hopf (dans le premier cas c'est grâce au Théorème 2.1.8).

L'homologie et la cohomologie sur un anneau commutatif \mathbb{k} (qui n'est pas un corps) des *H-espaces* seront considérées comme des algèbres sur \mathbb{k} .

Les espaces de nœuds non-compacts dans \mathbb{R}^d , $d \geq 3$, sont des H -espaces: on prend la composition des nœuds comme multiplication et le nœud trivial comme unité. Alors leur (co)homologie sur un corps est toujours une bigèbre (algèbre de Hopf, pour $d \geq 4$).

La filtration (0.1.2) dans le discriminant résolu σ définit une filtration dans l'homologie des espaces $\bar{\sigma} \simeq \bar{\Sigma}$:

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{H}_*^{(0)}(\bar{\sigma}, \mathbb{k}) & \subset & \tilde{H}_*^{(1)}(\bar{\sigma}, \mathbb{k}) & \subset & \tilde{H}_*^{(2)}(\bar{\sigma}, \mathbb{k}) & \subset & \dots \\ | & & | & & | & & \\ \tilde{H}_*^{(0)}(\bar{\Sigma}, \mathbb{k}) & \subset & \tilde{H}_*^{(1)}(\bar{\Sigma}, \mathbb{k}) & \subset & \tilde{H}_*^{(2)}(\bar{\Sigma}, \mathbb{k}) & \subset & \dots \end{array} \quad (2.3.2)$$

Grace à l'isomorphisme d'Alexander cela donne une filtration croissante dans la cohomologie des espaces de nœuds

$$H_{(0)}^*(\mathcal{K} \setminus \Sigma, \mathbb{k}) \subset H_{(1)}^*(\mathcal{K} \setminus \Sigma, \mathbb{k}) \subset H_{(2)}^*(\mathcal{K} \setminus \Sigma, \mathbb{k}) \subset \dots \quad (2.3.3)$$

De la même façon on obtient une filtration décroissante dans l'homologie

$$H_*^{(0)}(\mathcal{K} \setminus \Sigma, \mathbb{k}) \supset H_*^{(1)}(\mathcal{K} \setminus \Sigma, \mathbb{k}) \supset H_*^{(2)}(\mathcal{K} \setminus \Sigma, \mathbb{k}) \supset \dots \quad (2.3.4)$$

Pour $d \geq 4$ les filtraions (2.3.3-4) sont toujours finies pour tout degré $*$; si $d = 3$ la filtration (2.3.3) n'épuise pas toute la cohomologie de l'espace des nœuds. La conjecture de la complétude de la “(co)homologie de type fini” est en fait la condition de la convergence de la filtration (2.3.4) vers zéro. Ce problème n'est toujours pas résolu même pour les invariants – la cohomologie de degré zéro.

Conjecture 2.3.5. *La multiplication (et la comultiplication, si l'anneau principal \mathbb{k} est un corps) dans la cohomologie et l'homologie respectent les filtrations (2.3.3) et (2.3.4) respectivement. \square*

Modulo cette conjecture on définit une structure d'algèbre (bigèbre) sur les qoutients gradués (par rapport aux filtration (2.3.3-4)).

De la formule (2.1.9) et de l'hypothèse que la multiplication et la comultiplication respectent la filtration on déduit, que l'antipode S la respecte également, et donc il est aussi induit sur le quotient gradué.

La suite spectral principale (voir la section 0.1) et la suite, qui lui est duale, convergent, évidemment (comme \mathbb{k} -modules) vers ces quotients gradués. Dans la section précédente on a construit une structure d'algèbres de Hopf différentielles sur les complexes $CB_*D^{odd(even)}(\mathbb{k})$, qui sont isomorphes au premier terme de la suite spectrale auxiliaire (voir la section 0.1). De la même façon on peut définir une structure d'algèbres de Hopf différentielles sur le zéroième terme de la suite principale et sur celui de la suite duale. Nous n'allons pas décrire les zéroïèmes termes en question, cependant nous formulerons la conjecture suivante.

Conjecture 2.3.6. *La structure d'algèbre (algèbre de Hopf, si l'anneau principal est un corps) différentielle sur le zéroième terme de la suite spectrale principale (ou de la suite duale) est induite sur tous les termes $E_{*,*}^1, E_{*,*}^2, \dots (E_1^{*,*}, E_2^{*,*}, \dots)$, où pour une différentielle sur le i -ème terme on prend la i -ème différentielle de la suite spectrale. La structure d'algèbre (de Hopf) sur $E_{*,*}^\infty$ (resp. $E_\infty^{*,*}$) ainsi obtenue coïncide avec celle (du quotient gradué), que l'on a conjecturée dans (2.3.5). \square*

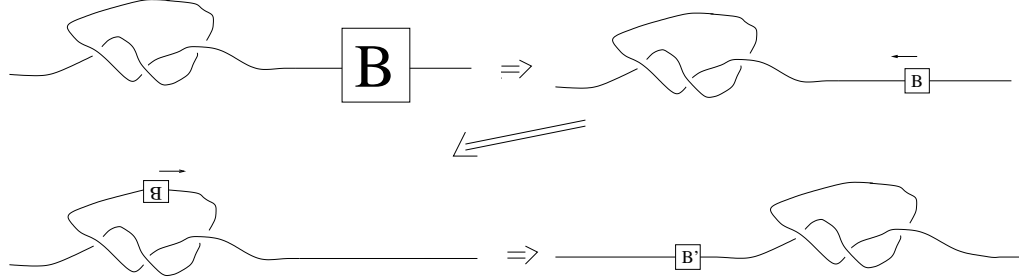
Si \mathbb{k} est un corps de caractéristique nulle, alors selon la conjecture 0.1.3 la suite spectrale principale et sa duale dégénèrent au premier terme. On en déduit (modulo les Conjecture 2.3.5-6), que l'algèbre de Hopf de l'homologie de $DHAB_*D^{odd(even)}(\mathbb{k})$ est exactement le quotient gradué, qui nous intéresse. Si l'on suppose aussi (la Conjecture 0.1.4 de Vassiliev),

que la filtration (0.1.2) est homotopiquement trivial, alors ce sera vrai pour tout anneau commutatif \mathbb{k} .

Dans [T] on démontrera le théorème suivant.

Théorème 2.3.7. [T] *La bigèbre de l'homologie sur \mathbb{Q} des espaces de nœuds non-compacts dans \mathbb{R}^d , $d \geq 3$, est toujours supercommutative.* \square

Idée de la démonstration: Si l'on a deux cycles, qui représentent certaines classes de l'homologie $H_*(\mathcal{K} \setminus \Sigma, \mathbb{k})$, et l'on considère leur produit, voir la Figure 2.3.8, alors on



(Figure 2.3.8)

va compresser celui, qui est à droite, jusqu'à ce qu'il soit très petit, et ensuite on le fait passer (à l'aide de la connexion adiabatique) par le cycle gauche. Le cycle ainsi obtenu ne sera point le produit du deuxième cycle sur le premier, parce que la connexion adiabatique donne une perturbation — une rotation de $SO(d-1)$, qui dépend des nœuds du premier cycle. Il se trouve (voir [T]), que cette perturbation ne vas pas importer, si \mathbb{k} est un corps de caractéristique nulle. \square

Il suit de ce théorème (toujours modulo les Conjectures 0.1.3, 2.3.5, 2.3.6), que l'algèbre de Hopf de l'homologie de $DHAB_*D^{odd(even)}(\mathbb{Q})$ est supercommutative. Cette affirmation sera démontrée indépendamment (voir les sections 2.4, 2.7).

Remarque 2.3.9. Du Théorème 2.3.7 (modulo la Conjecture 0.1.3) on déduit, que la bigèbre de l'homologie sur \mathbb{Q} de l'espace de nœuds non-compacts dans \mathbb{R}^d , $d \geq 4$, est isomorphe à la bigèbre de l'homologie de $DHAB_*D^{odd(even)}(\mathbb{Q})$. \square

2.4. Supercommutativité des algèbres (de Hopf) de l'homologie de $DHABD^{odd(even)}(\mathbb{k})$ et de $DHAB_*D^{even}(\mathbb{k})$

Théorème 2.4.1. *L'algèbre (de Hopf) de l'homologie de $DHABD^{odd(even)}(\mathbb{k})$ est supercommutative pour n'importe quel anneau commutatif \mathbb{k} .* \square

Démonstration du Théorème 2.4.1: Le Théorème est une conséquence facile du Théorème 2.4.10. \square

Théorème 2.4.2. *L'algèbre (de Hopf) de l'homologie de $DHAB_*D^{even}(\mathbb{k})$ est supercommutative pour n'importe quel anneau commutatif \mathbb{k} .* \square

Démonstration du Théorème 2.4.2: Le Théorème est une conséquence facile du Théorème 2.4.40. \square

Introduisons des notations nécessaires:

Soient A et B deux diagrammes de crochets (on considère simultanément les cas de d pair et impair). Soient $t_1 < t_2 < \dots < t_\beta$ les points du diagramme B . Alors on définit les diagrammes A_{t_j} , $1 \leq j \leq \beta$, comme des diagrammes équivalents à A et concentrés dans

de très petits voisinages des points t_j , $1 \leq j \leq \beta$.

Définissons

$$A \triangleright_j B := \begin{cases} B|_{x_{t_j}=A_{t_j}}, & \text{si } 1 \leq j \leq \beta; \\ 0, & \text{si } j > \beta. \end{cases} \quad (2.4.3)$$

(La notation $B|_{x_{t_j}=A}$ est donnée dans les sections 1.3.1, 1.3.2 pour d impair et pair respectivement.)

Définissons également

$$A \triangleright B := \sum_{j=1}^{\infty} A \triangleright_j B. \quad (2.4.4)$$

Evidemment, si le bidegré du diagramme A est (i_1, j_1) , celui de B est $(i_2, j_2 = \beta)$, alors le bidegré des éléments $A \triangleright_j B$, $A \triangleright B$ égale $(i_1 + i_2, j_1 + j_2 - 1)$.

On a immédiatement le lemme suivant.

Lemme 2.4.5. *Les opérations $\triangleright_j, j \in \mathbb{N}$, \triangleright introduites ci-dessus définissent correctement des applications*

$$BD^{odd(even)}(\mathbb{k}) \otimes BD^{odd(even)}(\mathbb{k}) \rightarrow BD^{odd(even)}(\mathbb{k}). \quad (2.4.6)$$

($BD^{odd(even)}(\mathbb{k})$ désigne l'espace des B -diagrammes.) Ces applications sont de bidegré $(0, -1)$. \square

Remarque 2.4.7. Selon les Remarques 1.3.14, 1.3.35

$$\partial A = (x_{t_-} \cdot x_{t_+}) \triangleright A - (-1)^{p(A)-1} A \triangleright (x_{t_-} \cdot x_{t_+}) \quad (2.4.8)$$

pour d impair, où $p(A)$ désigne le poids de A (voir la section 1.3.0), $p(A) \equiv \tilde{A} \bmod 2$;

$$\partial A = (x_{t_-} \wedge x_{t_+}) \triangleright A - (-1)^{p(A)-1} A \triangleright (x_{t_-} \wedge x_{t_+}) \quad (2.4.9)$$

pour d pair (dans ce cas $p(A) \equiv (\tilde{A} + 1) \bmod 2$). \square

Théorème 2.4.10. [T] *Pour tous deux diagrammes $A, B \in BD^{odd(even)}(\mathbb{k})$*

$$\partial(A \triangleright B) = (\partial A) \triangleright B + (-1)^{p(A)-1} A \triangleright (\partial B) + (-1)^{p(A)-1} (A * B - (-1)^{p(A)p(B)} B * A). \quad (2.4.11)$$

Ici “ $*$ ” signifie la multiplication dans $DHABD^{odd(even)}(\mathbb{k})$ (voir la section 2.2).

Remarque 2.4.12. L’affirmation du Théorème 2.4.10 est aussi vraie pour les B -diagrammes généralisés. \square

Maintenant considérons $DHAB_*D^{odd(even)}(\mathbb{k})$. La différentielle ∂ sur $DHAB_*D^{odd(even)}(\mathbb{k})$ peut être décomposée dans la somme $\bar{\partial} + \bar{\bar{\partial}}$, où $\bar{\partial}$ (resp. $\bar{\bar{\partial}}$) est la partie de ∂ , qui garde le nombre des astérisques en augmentant en 1 le nombre des composantes minimales (resp. diminue en 1 le nombre des astérisques tout en gardant le nombre des composantes minimales). Nous allons désigner $DHAB_*D^{odd(even)}(\mathbb{k})$, considérée comme une algèbre de Hopf (on oublie la différentielle ∂), par $HAB_*D^{odd(even)}(\mathbb{k})$. Evidemment, l’opérateur $\bar{\partial}$ sers d’une différentielle pour cette algèbre de Hopf. L’algèbre de Hopf différentielle ainsi obtenue sera désignée par $(HAB_*D^{odd(even)}(\mathbb{k}); \bar{\partial})$.

Théorème 2.4.13. [T] *L’algèbre (de Hopf) de l’homologie de $(HAB_*D^{odd}(\mathbb{k}); \bar{\partial})$ (resp. $(HAB_*D^{even}(\mathbb{k}); \bar{\bar{\partial}})$) est le produit tensoriel de l’homologie de $DHABD^{odd}(\mathbb{k})$ (resp. $DHABD^{even}(\mathbb{k})$) sur l’algèbre de Hopf libre $F^{odd}(x)$ (resp. $F^{even}(x)$) à un générateur impair (resp. pair) primitif x , qui correspond au diagramme se composant d’un seul astérisque isolé. \square*

Notons que ce théorème entraîne la non-supercommutativité de l'algèbre (de Hopf) de l'homologie de $(HAB_*D^{odd}(\mathbb{k}); \bar{\partial})$ (au contraire de $(HAB_*D^{even}(\mathbb{k}); \bar{\partial})$), parce que $F^{odd}(x)$ n'est pas supercommutative.

Soient A et B deux $*$ -diagrammes de crochets; soient $t_1^{(*)} < t_2^{(*)} < \dots < t_\beta^{(*)}$ les points du diagramme B (qui peuvent avoir des astérisques); $\tau_1^{(*)} < \tau_2^{(*)} < \dots < \tau_\alpha^{(*)}$ les points de A (qui peuvent également avoir des astérisques). De manière analogue on définit les diagrammes $A_{t_j^{(*)}}$, $1 \leq j \leq \beta$, comme des diagrammes équivalents à A et concentrés dans de très petits voisinages des points $t_j^{(*)}$.

On note par I_0 (resp. I_*), $I_0 \sqcup I_* = \{1, \dots, \alpha\}$, l'ensemble des index des points τ_i , $i \in I_0$ (resp. τ_i^* , $i \in I_*$), où il n'y a pas d'astérisques (resp. il y en a).

Définissons

$$A^* := (-1)^{p(A)-1} \sum_{i \in I_0} A|_{x_{\tau_i} = x_{\tau_i^*}}. \quad (2.4.14)$$

Je vais rappeler, que $p(A)$ est le poids du diagramme A , $p(A) \equiv (\tilde{A} + 1) \bmod 2$. Notons que $p(A^*) = p(A) + d - 1 \equiv (p(A) + 1) \bmod 2$.

Remarque 2.4.15. $(A^*)^* = 0$. \square

Définissons

$$A \bar{\triangleright}_j B := \begin{cases} B|_{x_{t_j} = A_{t_j}}, & \text{si dans } t_j, 1 \leq j \leq \beta, \text{ il n'y a pas d'astérisque;} \\ B|_{x_{t_j^*} = A_{t_j^*}^*}, & \text{si dans } t_j^*, 1 \leq j \leq \beta, \text{ il y a un astérisque;} \\ 0, & j > \beta. \end{cases} \quad (2.4.16)$$

Définissons également

$$A \bar{\triangleright} B := \sum_{j=1}^{\infty} A \bar{\triangleright}_j B. \quad (2.4.17)$$

Exemple 2.4.18. Si dans tous les α points de A et dans tous les β points de B il y a des astérisques, alors $A \bar{\triangleright} B = 0$. \square

On a immédiatement le lemme suivant.

Lemme 2.4.19. Les opérations $\bar{\triangleright}_j$, $j \in \mathbb{N}$, $\bar{\triangleright}$ définissent correctement des applications

$$B_*D^{even}(\mathbb{k}) \otimes B_*D^{even}(\mathbb{k}) \rightarrow B_*D^{even}(\mathbb{k}). \quad (2.4.20)$$

$(B_*D^{even}(\mathbb{k}))$ signifie l'espace des $*$ -diagrammes de crochets pour d pair) de bidegré $(0, -1)$. \square

Remarque 2.4.21. $\bar{\partial}A = (x_{t_-} \wedge x_{t_+}) \bar{\triangleright} A - (-1)^{p(A)-1} A \bar{\triangleright} (x_{t_-} \wedge x_{t_+})$. \square

Théorème 2.4.22.[T] Pour tous deux diagrammes $A, B \in B_*D^{even}(\mathbb{k})$

$$\bar{\partial}(A \bar{\triangleright} B) = (\bar{\partial}A) \bar{\triangleright} B + (-1)^{p(A)-1} A \bar{\triangleright} (\bar{\partial}B) + (-1)^{p(A)-1} (A * B - (-1)^{p(A)p(B)} B * A). \quad (2.4.23)$$

Ici “ $*$ ” signifie la multiplication dans $HAB_*D^{even}(\mathbb{k})$.

Remarque 2.4.24. Le Théorème 2.4.22 entraîne la supercommutativité de l'algèbre (de Hopf) de l'homologie de $(HAB_*D^{even}(\mathbb{k}), \bar{\partial})$. \square

Soit \mathfrak{g} une superalgèbre de Lie. Définissons un opérateur

$$\delta : \Lambda^* \mathfrak{g} \rightarrow \Lambda^{*-1} \mathfrak{g}, \quad (2.4.25)$$

en prenant pour $A = A_1 \wedge \cdots \wedge A_k$, $A_i \in \mathfrak{g}$,

$$\delta(A) := \delta(A_1 \wedge \cdots \wedge A_k) = \sum_{i < j} (-1)^{\lambda_{ij} + \tilde{A}_i} [A_i, A_j] \wedge A_1 \wedge \cdots \hat{A}_i \cdots \hat{A}_j \cdots \wedge A_k, \quad (2.4.26)$$

$$\text{où } \lambda_{ij} = (\tilde{A}_i + 1) \sum_{p=1}^{i-1} (\tilde{A}_p + 1) + (\tilde{A}_j + 1) \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq i}}^{j-1} (\tilde{A}_q + 1).$$

Il est facile de voir, que δ peut être correctement prolongé sur toute l'algèbre extérieure $\Lambda^* \mathfrak{g}$. Notons également que $\delta^2 = 0$. La couple $(\Lambda^* \mathfrak{g}, \delta)$ définit le dit *complexe de chaînes*, associé à \mathfrak{g} et calculant son homologie.

Pour tous éléments purs $A, B \in \Lambda^* \mathfrak{g}$ on a les formules suivantes

$$\delta(A \wedge B) = \delta(A) \wedge B + (-1)^{\tilde{A}+1} A \wedge \delta(B) + (-1)^{\tilde{A}} [A, B]; \quad (2.4.27)$$

$$\delta([A, B]) = [\delta(A), B] + (-1)^{\tilde{A}} [A, \delta(B)]. \quad (2.4.28)$$

Où $[\cdot, \cdot]$ est le crochet de Schouten (voir la section 1.3.2).

De manière analogue (selon la formule (2.4.27), où les A_i sont des crochets correspondant aux composantes minimales) on définit l'opérateur

$$\delta : B_* D^{even}(\mathbb{k}) \rightarrow B_* D^{even}(\mathbb{k}) \quad (2.4.29)$$

sur l'espace $B_* D^{even}(\mathbb{k})$. δ est de bidegré $(1, 0)$ et donc impair.

Pour le diagramme A on définit

$$A^0 := (-1)^{p(A)-1} \delta(A) = (-1)^{\tilde{A}} \delta(A); \quad (2.4.30)$$

$$A^* := A^* + A^0. \quad (2.4.31)$$

Remarque 2.4.32. $(A^*)^* = 0$. \square

Définissons

$$A \bar{\triangleright}_j B := \begin{cases} B|_{x_{t_j^*} = A_{t_j^*}^0}, & \text{si } 1 \leq j \leq \beta \text{ et dans } t_j^* \text{ il y a un astérisque;} \\ 0, & \text{si non;} \end{cases} \quad (2.4.33)$$

$$A \triangleright_j B := A \bar{\triangleright}_j B + A \bar{\bar{\triangleright}}_j B; \quad (2.4.34)$$

$$A \bar{\bar{\triangleright}} B := \sum_{j=1}^{\infty} A \bar{\triangleright}_j B; \quad (2.4.35)$$

$$A \triangleright B := A \bar{\triangleright} B + A \bar{\bar{\triangleright}} B. \quad (2.4.36)$$

Lemme 2.4.37. Les opérations $\bar{\triangleright}_j$, \triangleright_j , $\bar{\bar{\triangleright}}$, \triangleright définissent correctement des applications

$$B_* D^{even}(\mathbb{k}) \otimes B_* D^{even}(\mathbb{k}) \rightarrow B_* D^{even}(\mathbb{k}) \quad (2.4.38)$$

de bidegré $(0, -1)$. \square

Démonstration du Lemme 2.4.37: évident. \square

Remarque 2.4.39. $\partial A = (x_{t_-} \wedge x_{t_+}) \triangleright A - (-1)^{p(A)-1} A \triangleright (x_{t_-} \wedge x_{t_+})$. \square

Théorème 2.4.40.[T] Pour tous deux diagrammes $A, B \in B_* D^{even}(\mathbb{k})$

$$\partial(A \triangleright B) = (\partial A) \triangleright B + (-1)^{p(A)-1} A \triangleright (\partial B) + (-1)^{p(A)-1} (A * B - (-1)^{p(A)p(B)} B * A). \quad (2.4.41)$$

Remarque 2.4.42. Pour le cas où d est impair l'algèbre (de Hopf) de l'homologie de $(HAB_*D^{odd}(\mathbb{k}); \bar{\partial})$ n'est pas supercommutative, alors on ne peut pas écrire même le terme grossier (analogue à (2.4.18)) de l'homotopie du supercommutateur dans $DHAB_*D^{odd}(\mathbb{k})$. \square

2.5. L'homologie de $DHAB_*D^{odd(even)}(\mathbb{k})$ et de $DHAB_*D^{even}(\mathbb{k})$ forme des algèbres de Gerstenhaber

Il est facile de montrer, que les complexes $CBD^{odd(even)}(\mathbb{k})$, $CB_*D^{even}(\mathbb{k})$ munis du crochet impair $\{.,.\}$:

$$\{A, B\} := A \triangleright B - (-1)^{(p(A)-1)(p(B)-1)} B \triangleright A \quad (2.5.1)$$

sont en fait des superalgèbres de Lie différentielles, où la différentielle ∂ (selon les Remarques 2.4.7, 2.4.39) est le crochet avec $x_{t_-} \cdot x_{t_+}$ (ou $x_{t_-} \wedge x_{t_+}$):

$$\partial A = \{x_{t_-} \cdot x_{t_+}, A\} \text{ ou } \{x_{t_-} \wedge x_{t_+}, A\}.$$

Dans l'homologie le crochet $\{.,.\}$ sera concordant avec la multiplication (qui y est supercommutative), c'est-à-dire pour toutes trois classes x, y, z de l'homologie on a

$$\{x, yz\} = \{x, y\}z + (-1)^{(p(x)-1)p(y)} y\{x, z\}. \quad (2.5.2)$$

Ce fait suit des considérations générales pour les opérades, voir la section 3 et le Théorème 3.2.4 en particulier.

Définition 2.5.3. Les algèbres supercommutatives munis d'un crochet de Lie impair, qui est compatible avec la multiplication selon (2.5.2), sont appelées *algèbres de Gerstenhaber* (dans cette situation ce crochet-là est appelé *crochet (impair) de Kirillov*). \square

Exemple 2.5.4. L'algèbre extérieure d'une superalgèbre de Lie avec le crochet de Schouten (voir la section 1.3.2) fait une algèbre de Gerstenhaber. \square

Notons que le crochet $\{.,.\}$ conserve l'espace des éléments primitifs. Alors, si \mathbb{k} est un corps de caractéristique nulle, l'algèbre de Gerstenhaber inconnue est donc l'algèbre extérieure de la superalgèbre de Lie (avec le crochet $\{.,.\}$) des éléments primitifs de l'homologie.

2.6. Calcul de l'homologie de $DHABD^{odd(even)}(\mathbb{Z})$ pour la complexité $i \leq 2$

2.6.1. Cas où d est pair

Notation 2.6.1. Dans cette section et dans celle qui la suivent le générateur x_i correspond toujours au i -ième point, compté de gauche à droite dans les diagrammes correspondants. \square

$i = 0$. On n'a que le diagramme trivial; ce diagramme ne vient pas de la géométrie du discriminant, mais on l'ajoute dans tous les complexes $CB_{(*)}D^{odd(even)}(\mathbb{k})$, parce qu'il correspond à l'unité (perdue sous la dualité d'Alexander) de l'homologie. Ce diagramme définit un cycle étant l'unité dans l'algèbre (de Hopf) de l'homologie de $DHABD^{odd(even)}(\mathbb{k})$.

$i = 1$. On a aussi un seul B -diagramme — $[x_1x_2]$, qui définit un générateur impair (primitif) y de bidegré $(1, 2)$ dans l'homologie de $DHABD^{even}(\mathbb{Z})$.

$i = 2$. L'espace des diagrammes de bidegré $(2, 3)$ est de dimension 2. Pour une base on prend

$$\begin{aligned} a_1 &= [[x_1x_2]x_3]; \\ a_2 &= [[x_1x_3]x_2]. \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

L'espace des diagrammes de bidegré (2,4) est de dimension 3. Pour une base on prend

$$\begin{aligned} b_1 &= [x_1x_4] \wedge [x_2x_3]; \\ b_2 &= [x_1x_3] \wedge [x_2x_4]; \\ b_3 &= [x_1x_2] \wedge [x_3x_4]. \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

Trouvons $\partial a_1, \partial a_2$:

$$\begin{aligned} \partial a_1 &= \partial([x_1x_2]x_3) = P([x_1 \wedge x_2, x_3]x_4 + [[x_1, x_2 \wedge x_3]x_4]) = \\ &= P([x_1 \wedge [x_2x_3], x_4] - [x_2 \wedge [x_1x_3], x_4] + [[x_1x_2] \wedge x_3, x_4] - [[x_1x_3] \wedge x_2, x_4]) = \\ &= [x_1x_4] \wedge [x_2x_3] + [x_1x_3] \wedge [x_2x_4] + [x_1x_2] \wedge [x_3x_4] - [x_1x_3] \wedge [x_2x_4] = b_1 + b_3. \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

$$\begin{aligned} \partial a_2 &= \partial([x_1x_3]x_2) = P([x_1 \wedge x_2, x_4]x_3 + [[x_1, x_3 \wedge x_4], x_2]) = \\ &= P([x_1 \wedge [x_2x_4], x_3] - [x_2 \wedge [x_1x_4], x_3] + [[x_1x_3] \wedge x_4, x_2] - [[x_1x_4] \wedge x_3, x_2]) = \\ &= [x_1x_3] \wedge [x_2x_4] + [x_1x_4] \wedge [x_2x_3] - [x_1x_3] \wedge [x_2x_4] + [x_1x_4] \wedge [x_2x_3] = 2b_1. \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

D'où on déduit, que dans le bidegré (2,3) l'homologie est triviale; dans le bidegré (2,4) l'homologie est isomorphe à $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$. La torsion \mathbb{Z}_2 est engendré par le cycle $y^2 = y * y = b_3 = [x_1x_2] \wedge [x_3x_4]$. Pour un \mathbb{Z} -générateur on peut prendre $u = b_2 = [x_1x_3] \wedge [x_2x_4]$. Il est facile de voir, que y^2 et u sont primitifs.

2.6.2. Cas où d est impair

$i = 0$. On n'a que le diagramme trivial définissant l'unité dans l'algèbre (de Hopf) de l'homologie.

$i = 1$. On n'a que le diagramme $[x_1x_2]$, qui définit un générateur pair (primitif) y de bidegré (1,2) dans l'homologie de $DHABD^{odd}(\mathbb{Z})$.

$i = 2$. Pour une base dans l'espace des diagrammes on prend $a_1, a_2; b_1, b_2, b_3$ respectivement définis par les formules (2.6.1), (2.6.2) (on remplace la multiplication extérieure par la multiplication normale).

Trouvons $\partial a_1, \partial a_2$:

$$\begin{aligned} \partial a_1 &= P([x_1 \cdot x_2, x_3], x_4] - [[x_1, x_2 \cdot x_3], x_4]) = \\ &= P([x_1 \cdot [x_2x_3], x_4] - [x_2 \cdot [x_1x_3], x_4] - [[x_1x_2] \cdot x_3, x_4] + [[x_1x_3] \cdot x_2, x_4]) = \\ &= [x_1x_4] \cdot [x_2x_3] - [x_1x_3] \cdot [x_2x_4] - [x_1x_2] \cdot [x_3x_4] + [x_1x_3] \cdot [x_2x_4] = b_1 - b_3. \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

$$\begin{aligned} \partial a_2 &= P([x_1 \cdot x_2, x_4], x_3] - [[x_1, x_3 \cdot x_4], x_2]) = \\ &= P([x_1 \cdot [x_2x_4], x_3] - [x_2 \cdot [x_1x_4], x_3] - [[x_1x_3] \cdot x_4, x_2] + [[x_1x_4] \cdot x_3, x_2]) = \\ &= [x_1x_3] \cdot [x_2x_4] - [x_1x_4] \cdot [x_2x_3] - [x_1x_3] \cdot [x_2x_4] + [x_1x_4] \cdot [x_2x_3] = 0. \end{aligned} \quad (2.6.7)$$

D'où on déduit, que dans le bidegré (2,3) l'homologie est isomorphe à \mathbb{Z} ; il apparaît un nouveau générateur impair (primitif) $z = [[x_1x_3]x_2]$. Il est facile de voir, que $\{y, y\} = \{[x_1x_2], [x_1x_2]\} = -2z$. Dans le bidegré (2,4) l'homologie est isomorphe à $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, pour une base on peut prendre $y^2 = b_3 = [x_1x_2] \cdot [x_3x_4]$ et $u = b_2 = [x_1x_3] \cdot [x_2x_4]$. Au lieu de u on peut prendre l'élément

$$u' = \log_* id(u) = u - y^2, \quad (2.6.8)$$

qui est bien primitif (la description de l'opérateur $\log_* id$ est donnée dans la section 2.1).

2.7. Rapport entre les algèbres de Hopf de l'homologie de $DHABD^{odd(even)}(\mathbb{Q})$ et de $DHAB_*D^{odd(even)}(\mathbb{Q})$

2.7.1. Cas où d est pair

Considérons le diagramme commutatif (2.2.7) dans le cas où d est pair, pour $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$ (ou bien pour n'importe quel autre corps de caractéristique nulle).

Théorème 2.7.1.[T] *Si d est pair et \mathbb{k} est un corps de caractéristique nulle, l'application i_1 (resp. p_1) du diagramme commutatif (2.2.7) induit une application surjective en homologie, dont le noyau est l'idéal engendré par $y = [x_1, x_2]$ (générateur pair primitif – voir la section 2.6). \square*

Notons que l'application i_1 en homologie est complètement définie par sa restriction sur l'espace des éléments primitifs. Les espaces des éléments primitifs de $DHABD^{even}(\mathbb{Q})$ et de $DHAB_*D^{even}(\mathbb{Q})$ possèdent le crochet $\{.,.\}$ (voir la section 2.5). L'application i_1 définit un morphisme des algèbres de Lie en question. On en conclut immédiatement, que $y = [x_1, x_2]$ est un élément central de l'algèbre de Lie (avec le crochet $\{.,.\}$) des éléments primitifs de l'homologie de $DHABD^{even}(\mathbb{Q})$.

2.7.2. Cas où d est impair

Théorème 2.7.2.[T] *Si d est impair et \mathbb{k} est un corps de caractéristique nulle, l'application i_1 (resp. p_1) du diagramme commutatif (2.2.7) induit une application surjective en homologie, dont le noyau est l'idéal engendré par les générateurs primitifs $y = [x_1, x_2]$ (qui est pair) et $z = [[x_1 x_3] x_2]$ (qui est impair), voir la section 2.6. \square*

Ce théorème entraîne la supercommutativité de l'homologie de $DHAB_*D^{odd}(\mathbb{Q})$

2.8. Bigèbres des (super)diagrammes de cordes

2.8.1. Cas où d est impair. Bigèbres des diagrammes de cordes

On va désigner par $H_{*,*}(DHAB_{(0)}D^{odd}(\mathbb{k}))$ l'algèbre (de Hopf) bigraduée de l'homologie de $DHAB_{(0)}D^{odd}(\mathbb{k})$. Il est facile de montrer, que (voir les Exemples 1.3.17, 1.3.20)

$$BChD^{odd}(\mathbb{k}) := \bigoplus_{i=0}^{+\infty} H_{i,2i}(DHABD^{odd}(\mathbb{k})); \quad (2.8.1)$$

$$BCh_0D^{odd}(\mathbb{k}) := \bigoplus_{i=0}^{+\infty} H_{i,2i}(DHAB_0D^{odd}(\mathbb{k})) \quad (2.8.2)$$

sont des bigèbres pour n'importe quel anneau commutatif \mathbb{k} . Ces bigèbres sont les dites *bigèbres des diagrammes de cordes* ($BChD$ vient de l'anglais “Bialgebra of Chord Diagrams”).

L'application naturelle

$$p : BChD^{odd}(\mathbb{k}) \rightarrow BCh_0D^{odd}(\mathbb{k}) \quad (2.8.3)$$

est surjective, dont le noyau est l'idéal, engendré par le générateur primitif correspondant à une corde isolée $[x_1, x_2]$. Ces bigèbres sont commutatives, parce que le bidegré $(i, 2i)$ est toujours pair.

Normalement on considère les bigèbres des diagrammes (de cordes) sur un cercle S^1 , c'est parce que les théories des invariants (de type fini – en particulier) de nœuds et de nœuds non-compacts coïncident. Il est facile de montrer, que tout diagramme de cordes D avec les points $t_1 < t_2 < \dots < t_{2n}$ sur \mathbb{R} est égal (grâce aux relations de quatre termes) au diagramme, qui est obtenu de D par la permutation circulaire des points:

$$(t'_1, t'_2, \dots, t'_{2n}) = (t_2, \dots, t_{2n}, t_1). \quad (2.8.4)$$

La bigèbre des diagrammes de cordes a été intensément étudiée pendant les dernières années, voir [BN, ChD, ChDL, K1, Kn, L, NS, S, Z]. Il est connu que jusqu'à la complexité $i = 12$ il n'y a pas de torsion dans $BChD(\mathbb{Z})$ (voir [K]), ce qui confirme indirectement la conjecture de Vassiliev sur la trivialité homotopique de la filtration (0.1.2) dans le discriminant résolu σ . Comme S.K.Lando l'a démontré, voir [L], $BChD(\mathbb{Z})$ est engendrée par ses éléments primitifs. Alors la bigèbre $BChD(\mathbb{Z})$, étant quotientée par les torsions possibles, est l'algèbre symétrique sur \mathbb{Z} de l'espace de ses éléments primitifs (comme elle est commutative aussi bien que cocommutative). Les calculs, commencés par V.A.Vassiliev et poursuivis par D.Bar-Natan [BN] et par J.A.Kneissler [Kn], donnent les valeurs suivantes des dimensions p_i , $i = 1, \dots, 12$, des espaces des éléments primitifs de complexité i .

$$(2.8.5) \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} i & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline p_i & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 12 & 18 & 27 & 39 & 55 \end{array}$$

2.8.2. Cas où d est pair. Bigèbres des superdiagrammes de cordes

De manière analogue on définit les *bigèbres des superdiagrammes de cordes* (voir l'Exemple 1.3.36):

$$BChD^{even}(\mathbb{k}) := \oplus_{i=0}^{+\infty} H_{i,2i}(DHABD^{even}(\mathbb{k})); \quad (2.8.6)$$

$$BCh_0D^{even}(\mathbb{k}) := \oplus_{i=0}^{+\infty} H_{i,2i}(DHAB_0D^{even}(\mathbb{k})). \quad (2.8.7)$$

L'application naturelle

$$p : BChD^{even}(\mathbb{k}) \rightarrow BCh_0D^{even}(\mathbb{k}) \quad (2.8.8)$$

est également surjective, dont le noyau est l'idéal engendré par le générateur impair primitif correspondant à une corde isolée $[x_1, x_2]$.

Dans ce cas-là le diagramme D avec les points $t_1 < \dots < t_{2n}$ sur \mathbb{R} n'est plus équivalent au diagramme D' obtenu de D par la permutation circulaire des ponts (2.8.4) (par exemple, c'est pas vrai pour une corde isolée $[x_1 x_2]$), mais par contre tous deux diagrammes semblables sont toujours égaux dans $BCh_0D^{even}(\mathbb{k})$. Alors $BCh_0D^{even}(\mathbb{k})$ peut être vue comme l'espace des superdiagrammes de cordes sur un cercle S^1 quotienté par les relations de quatre termes et par les relations d'un terme.

L'espace des superdiagrammes de cordes sur un cercle, quotienté seulement par les relations de quatre termes est isomorphe à l'espace des superdiagrammes de cordes sur une droite quotienté par les relations de quatre termes et par les doubles relations d'un terme.

2.9. Calcul de l'homologie de $DHAB_0D^{odd(even)}(\mathbb{Z})$ pour la complexité $i \leq 3$

2.9.1. Cas où d est pair

$i = 0$. On n'a que le diagramme trivial, qui définit l'unité dans l'algèbre (de Hopf) de l'homologie.

$i = 1$. L'espace des B_0 -diagrammes y est trivial.

$i = 2$. On n'a qu'un seul diagramme non-nul $[x_1 x_3] \wedge [x_2 x_4]$, qui définit un générateur pair (primitif) de bidegré $(2, 4)$ dans l'algèbre (de Hopf) de l'homologie de $DHAB_0D^{even}(\mathbb{Z})$.

$i = 3$. Si la deuxième graduation $j = 4$, alors de tels diagrammes ont une composante minimale. L'espace de ces diagrammes est isomorphe à \mathbb{Z} . Pour un générateur on prendra

$$a_1 = [[x_1x_3], [x_2x_4]]. \quad (2.9.1)$$

Si $j = 5$ pour une base dans l'espace des diagrammes on prend

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= [[x_2x_4]x_5] \wedge [x_1x_3]; \\ b_2 &= [[x_2x_5]x_3] \wedge [x_1x_4]; \\ b_3 &= [[x_1x_3]x_5] \wedge [x_2x_4]; \\ b_4 &= [[x_1x_5]x_3] \wedge [x_2x_4]; \\ b_5 &= [[x_1x_3]x_4] \wedge [x_2x_5]; \\ b_6 &= [[x_1x_4]x_2] \wedge [x_3x_5]. \end{aligned} \right\} \quad (2.9.2)$$

Si $j = 6$ pour une base on prend

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= [x_1x_6] \wedge [x_2x_4] \wedge [x_3x_5] \\ c_2 &= [x_1x_5] \wedge [x_2x_4] \wedge [x_3x_6] \\ c_3 &= [x_1x_4] \wedge [x_2x_6] \wedge [x_3x_5] \\ c_4 &= [x_1x_4] \wedge [x_2x_5] \wedge [x_3x_6] \\ c_5 &= [x_1x_3] \wedge [x_2x_5] \wedge [x_4x_6] \end{aligned} \right\} \quad (2.9.3)$$

Trouvons

$$\begin{aligned} \partial a_1 &= \partial([x_1x_3], [x_2x_4]) = \\ &= P([x_1 \wedge x_2, x_4], [x_3x_5]) + [[x_1, x_3 \wedge x_4], [x_2x_5]] + \\ &\quad + [[x_1x_4], [x_2 \wedge x_3, x_5]] + [[x_1x_3], [x_2, x_4 \wedge x_5]] = \\ &= [[x_2x_4]x_5] \wedge [x_1x_3] - [[x_1x_5]x_3] \wedge [x_2x_4] + \\ &\quad + [[x_1x_4]x_2] \wedge [x_3x_5] = b_1 - b_4 + b_6. \end{aligned} \quad (2.9.4)$$

Trouvons

$$\begin{aligned} \partial b_1 &= \partial([x_2x_4]x_5 \wedge [x_1x_3]) = \\ &= P([x_2 \wedge x_3, x_5], x_6] \wedge [x_1x_4] + [[x_2, x_4 \wedge x_5], x_6] \wedge [x_1x_3]) = \\ &= [x_1x_4] \wedge [x_2x_6] \wedge [x_3x_5] + [x_1x_4] \wedge [x_2x_5] \wedge [x_3x_6] + \\ &\quad + [x_1x_3] \wedge [x_2x_4] \wedge [x_5x_6] - [x_1x_3] \wedge [x_2x_5] \wedge [x_4x_6] = \\ &= c_3 + c_4 - c_5. \end{aligned} \quad (2.9.5)$$

De manière analogue on obtient

$$\left. \begin{aligned} \partial b_2 &= c_2 + c_3 - c_4 \\ \partial b_3 &= c_1 + c_3 + c_4 - c_5 \\ \partial b_4 &= c_2 + c_3 \\ \partial b_5 &= c_2 + c_3 + c_4 \\ \partial b_6 &= c_2 - c_4 + c_5 \end{aligned} \right\} \quad (2.9.6)$$

Alors les matrices de la différentielle ∂ seront suivantes:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.9.7)$$

D'où on a:

Dans le bidegré (3, 4) l'homologie est triviale.

Dans le bidegré (3, 5) l'homologie est isomorphe à \mathbb{Z} . On obtient un générateur pair (primitif)

$$w = b_2 - 2b_4 + b_5 = [[x_2x_5]x_3] \wedge [x_1x_4] - 2[[x_1x_5]x_3] \wedge [x_2x_4] + [[x_1x_3]x_4] \wedge [x_2x_5]. \quad (2.9.8)$$

Remarque 2.9.9. Pour l'élément

$$w' = [[x_2x_5]x_3] \wedge [x_1x_4] - 2[[x_1x_5]x_3] \wedge [x_2x_4] + [[x_1x_4]x_3] \wedge [x_2x_5] \quad (2.9.10)$$

$\partial w' = 0$ dans $DHABD^{even}(\mathbb{Z})$. D'un autre côté $w' = w$ dans $DHAB_0D^{even}(\mathbb{Z})$, alors l'élément w (considéré comme une classe de l'homologie de $DHAB_0D^{even}(\mathbb{Z})$) appartient à $\text{Im}(p_1)_*$, où $(p_1)_*$ est l'application en homologie induite par la projection p_1 (voir le diagramme 2.2.7). Il est facile de voir, que w' (comme une classe de l'homologie) ne peut pas être obtenu des diagrammes de cordes par des opérations de la multiplication $*$ et du crochet $\{.,.\}$. \square

Dans le bidegré (3, 6) on a les relations suivantes entre les c_i , $i = 1, \dots, 5$.

$$\left. \begin{array}{l} c_1 = c_4 = 0; \\ c_2 = -c_3 = -c_5. \end{array} \right\} \quad (2.9.11)$$

Cela donne encore un générateur impair (primitif).

2.9.2. Cas où d est impair

$i = 0$. On n'a que le diagramme trivial définissant l'unité dans l'algèbre (de Hopf) de l'homologie.

$i = 1$. L'espace des B_0 -diagrammes est trivial.

$i = 2$. On n'a qu'un seul diagramme non-nul $[x_1x_3] \cdot [x_2x_4]$, qui définit un générateur pair (primitif) de bidegré (2, 4) dans l'algèbre (de Hopf) de l'homologie de $DHAB_0D^{odd}(\mathbb{Z})$.

$i = 3$. Comme une base pour $j = 4, 5, 6$ on prend respectivement les mêmes $a_1; b_1, \dots, b_6; c_1, \dots, c_5$ en remplaçant la multiplication extérieure par la multiplication normale.

Trouvons

$$\begin{aligned} \partial a_1 &= \partial([x_1x_3], [x_2x_4]) = \\ &= P([x_1 \cdot x_2, x_4], [x_3x_5]) - [x_1, x_3 \cdot x_4], [x_2x_5] + \\ &\quad + [[x_1x_4], [x_2 \cdot x_3, x_5]] - [[x_1x_3], [x_2, x_4 \cdot x_5]] = \\ &= -[[x_2x_4]x_5] \cdot [x_1x_3] - 2[[x_2x_5]x_3] \cdot [x_1x_4] + \\ &\quad + [[x_1x_5]x_3] \cdot [x_2x_4] + 2[[x_1x_3]x_4] \cdot [x_2x_5] + \\ &\quad + [[x_1x_4]x_2] \cdot [x_3x_5] = -b_1 - 2b_2 + b_4 + 2b_5 + b_6. \end{aligned} \quad (2.9.12)$$

Trouvons

$$\begin{aligned} \partial b_1 &= \partial([x_2x_4]x_5] \cdot [x_1x_3]) = \\ &= P([x_2 \cdot x_3, x_5], x_6] \cdot [x_1x_4] - [x_2, x_4 \cdot x_5], x_6] \cdot [x_1x_3]) = \\ &= [x_1x_4] \cdot [x_2x_6] \cdot [x_3x_5] - [x_1x_4] \cdot [x_2x_5] \cdot [x_3x_6] + \\ &\quad + [x_1x_3] \cdot [x_2x_4] \cdot [x_5x_6] + [x_1x_3] \cdot [x_2x_5] \cdot [x_4x_6] = c_3 - c_4 + c_5. \end{aligned} \quad (2.9.13)$$

De manière analogue on obtient

$$\left. \begin{aligned} \partial b_2 &= c_2 + c_3 - c_4; \\ \partial b_3 &= c_1 - c_3 + c_4 - c_5; \\ \partial b_4 &= -c_2 + c_3; \\ \partial b_5 &= c_2 + c_3 - c_4; \\ \partial b_6 &= c_2 - c_4 + c_5. \end{aligned} \right\} \quad (2.9.14)$$

Alors les matrices de la différentielle ∂ sont les suivantes:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.9.15)$$

Donc:

Dans le bidegré $(3, 4)$ l'homologie est triviale.

Dans le bidegré $(3, 5)$ l'homologie est isomorphe à \mathbb{Z} . On obtient un générateur impair (primitif)

$$w = b_2 - b_5 = [[x_2x_5]x_3] \cdot [x_1x_4] - [[x_1x_3]x_4] \cdot [x_2x_5]. \quad (2.9.16)$$

Remarque 2.9.17. Pour l'élément

$$w' = [[x_2x_5]x_3] \cdot [x_1x_4] + [[x_1x_4]x_3] \cdot [x_2x_5] \quad (2.9.18)$$

$\partial w' = 0$ dans $DHABD^{odd}(\mathbb{Z})$. D'un autre côté, $w' = w$ dans $DHAB_0D^{odd}(\mathbb{Z})$, alors l'élément w (considéré comme une classe de l'homologie de $DHAB_0D^{odd}(\mathbb{Z})$) appartient à $\text{Im}(p_1)_*$, où $(p_1)_*$ est l'application en homologie induite par la projection p_1 (voir le diagramme (2.2.7)). Notons que

$$\begin{aligned} \{[x_1x_2], [x_1x_3] \cdot [x_2x_4]\} &= [x_1x_2] \triangleright ([x_1x_3] \cdot [x_2x_4]) + ([x_1x_3] \cdot [x_2x_4]) \triangleright [x_1x_2] = \\ &= -[x_1x_3] \cdot [[x_2x_5]x_4] - [x_2x_4] \cdot [[x_1x_5]x_3] - [x_3x_5] \cdot [[x_1x_4]x_2] - [x_2x_5] \cdot [x_1[x_3x_4]] + [x_1x_4] \cdot [[x_2x_3]x_5]. \end{aligned} \quad (2.9.19)$$

Dans $DHAB_0D^{odd}(\mathbb{Z})$ cet élément est égal à

$$\begin{aligned} [x_1x_3] \cdot [[x_2x_4]x_5] - [x_2x_4] \cdot [[x_1x_5]x_3] - [x_3x_5] \cdot [[x_1x_4]x_2] &= \\ = b_1 - b_4 - b_6 = -\partial a_1 - 2b_2 + 2b_5 = -\partial a_1 - 2w. \end{aligned} \quad (2.9.20)$$

Cela veut dire, que

$$w' \sim -\frac{1}{2}\{y, u\} \sim -\frac{1}{2}\{y, u - y^2\} \sim -\frac{1}{2}\{y, u'\} \quad (2.9.21)$$

dans l'homologie de $DHABD^{odd}(\mathbb{Q})$ (où $y = [x_1x_2]$; $u = [x_1x_3] \cdot [x_2x_4]$; $u' = [x_1x_3] \cdot [x_2x_4] - [x_1x_2] \cdot [x_3x_4]$). w' peut donc être obtenu des diagrammes de cordes. \square

Dans le bidegré $(3, 6)$ on a les relations suivantes entre les c_i , $i = 1, \dots, 5$:

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= 0; \\ c_2 &= c_3 = c_5; \\ c_4 &= 2c_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.9.22)$$

Cela donne encore un générateur pair (primitif).

3. L'homologie des complexes de Hochschild pour les opérades et l'homologie des espaces de nœuds

3.1. Structure de superalgèbre de Lie sur une opérade linéaire

Soit $\{\mathcal{O}(n), n \geq 0\}$ une opérade dans la catégorie des espaces vectoriels \mathbb{Z}_2 -gradués (ou \mathbb{Z} -gradués). Cet objet est lié à l'ensemble des espaces $\{\text{Hom}(V^{\otimes n}, V), n \geq 0\}$ de toutes les opérations n -aires sur l'espace vectoriel V , de la même façon qu'un groupe algébrique est lié au groupe $GL(V)$ des transformations linéaires. Une structure d'opérade sur la famille des espaces \mathbb{Z}_2 - (ou \mathbb{Z} -) gradués $\mathcal{O}(n)$ consiste en une famille des opérations conservant la graduation

$$\gamma : \mathcal{O}(k) \otimes (\mathcal{O}(n_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{O}(n_k)) \rightarrow \mathcal{O}(n_1 + \dots + n_k) \quad (3.1.1)$$

qui satisfont certains axiomes naturels de l'associativité. Ces axiomes peuvent être obtenus du modèle de l'opérade des homomorphismes $\{\text{Hom}(V^{\otimes n}, V), n \geq 0\}$; ici γ est la substitution des valeurs des k opérations dans une opération k -aire. La définition précise peut être trouvée dans [GJ], [GK], ou [KSV]. On sous-entend également une action du groupe symétrique S_n sur chaque $\mathcal{O}(n)$ et un élément de l'unité $id \in \mathcal{O}(1)$, analogues à l'action de S_n sur $\text{Hom}(V^{\otimes n}, V)$ par les transpositions des entrées et à l'opérateur identité dans $\text{Hom}(V, V)$, respectivement.

Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{O} = \bigoplus_n \mathcal{O}(n)$ — la somme de toutes les composantes de l'opérade. On va désigner par \tilde{x} la parité (ou le degré) d'un élément $x \in \mathcal{O}(n)$. Désignons également par

$$|x| := \tilde{x} + n - 1, \quad (3.1.2)$$

où “ n ” correspond à n entrées, “ -1 ” à une sortie de l'élément x de l'opérade. Notons que les applications (3.1.1) conservent la graduation $|\cdot|$.

Définissons une collection d'opérations polylinéaires sur \mathcal{O} :

$$x\{x_1, \dots, x_n\} := \sum (-1)^\epsilon \gamma(x; id, \dots, id, x_1, id, \dots, id, x_n, id, \dots, id) \quad (3.1.3)$$

pour $x, x_1, \dots, x_n \in \mathcal{O}$, où on prend la somme par toutes les substitutions possibles de x_1, \dots, x_n dans x dans l'ordre prescrit; $\epsilon := \sum_{p=1}^n |x_p| i_p$, i_p étant le nombre des entrées avant x_p . Les opérations $x\{x_1, \dots, x_n\}$ conservent (la graduation initiale et) la graduation $|\cdot|$, *i.e.*

$$|x\{x_1, \dots, x_n\}| = |x| + |x_1| + \cdots + |x_n|. \quad (3.1.4)$$

Définissons aussi

$$x\{\} := x, \quad (3.1.5)$$

$$x \circ y := x\{y\}. \quad (3.1.6)$$

On peut facilement vérifier l'identité suivante

$$\begin{aligned} & x\{x_1, \dots, x_n\}\{y_1, \dots, y_n\} = \\ & \sum_{0 \leq i_1 \leq j_1 \leq \dots \leq i_m \leq j_m \leq n} (-1)^\epsilon x\{y_1, \dots, y_{i_1}, x_1\{y_{i_1+1}, \dots, y_{j_1}\}, y_{j_1+1}, \dots, y_{i_m}, \\ & \quad x_m\{y_{i_m+1}, \dots, y_{j_m}\}, y_{j_m+1}, \dots, y_n\}, \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

où $\epsilon := \sum_{p=1}^m \left(|x_p| \sum_{q=1}^{i_p} |y_q| \right)$, autrement dit le signe est obtenu, quand on fait passer les x_i par les y_j .

Remarque 3.1.8. L'identité (3.1.7) pour le cas $m = n = 1$ entraîne, que le crochet

$$[x, y] := x \circ y - (-1)^{|x||y|} y \circ x \quad (3.1.9)$$

définit une structure de superalgèbre de Lie \mathbb{Z}_2 -(ou \mathbb{Z} -)graduée sur \mathcal{O} . \square

3.2. Complexes de Hochschild

Soient $\mathcal{O} = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} \mathcal{O}(n)$ une opérade quelconque, $\mathcal{AS} = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} \mathcal{AS}(n)$ l'opérade des algèbres associatives, alors tout morphisme (dans la catégorie des opérades)

$$\Pi : \mathcal{AS} \longrightarrow \mathcal{O} \quad (3.2.1)$$

définit un élément $\Pi(m_2) \in \mathcal{O}(2)$, où $m_2 \in \mathcal{AS}(2)$ correspond à l'opération de multiplication.

Notons que $m_2 \circ m_2 = 0$ (c'est la condition de l'associativité de la multiplication). On a donc $[\Pi(m_2), \Pi(m_2)] = 2\Pi(m_2 \circ m_2) = 0$. Alors \mathcal{O} devient une superalgèbre de Lie \mathbb{Z}_2 -(ou \mathbb{Z} -)graduée différentielle avec la différentielle

$$\partial x = [\Pi(m_2), x] = \Pi(m_2) \circ x - (-1)^{|x|} x \circ \Pi(m_2). \quad (3.2.2)$$

Le complexe (\mathcal{O}, ∂) ainsi obtenu sera appelé *complexe de Hochschild* pour l'opérade \mathcal{O} (munie d'un morphisme $\Pi : \mathcal{AS} \rightarrow \mathcal{O}$). Si \mathcal{O} est une opérade des homomorphismes, alors ce complexe est le complexe de Hochschild (classique) pour une algèbre associative.

On peut montrer, que \mathcal{O} possède une structure d'algèbre associative différentielle \mathbb{Z}_2 -(ou \mathbb{Z} -)graduée avec la même différentielle ∂ et avec la multiplication

$$x * y := (-1)^{|x|+1} \Pi(m_2) \{x, y\}. \quad (3.2.3)$$

Théorème 3.2.4. *La multiplication $*$ et le crochet $[\cdot, \cdot]$ induisent une structure d'algèbre de Gerstenhaber (voir la définition 2.5.3) dans l'homologie du complexe de Hochschild (\mathcal{O}, ∂) . \square*

Démonstration du Théorème 3.2.4: Le Théorème se déduit des formules suivantes d'homotopie:

$$x * y - (-1)^{(|x|+1)(|y|+1)} y * x = (-1)^{|x|} (\partial(x \circ y) - \partial x \circ y - (-1)^{|x|} x \circ \partial y). \quad (3.2.5)$$

Cette formule entraîne la supercommutativité de la multiplication $*$ en homologie.

$$\begin{aligned} & [x, y * z] - [x, y] * z - (-1)^{|x|(|y|+1)} y * [x, z] = \\ & (-1)^{|x|+|y|+1} (\partial(x\{y, z\}) - (\partial x)\{y, z\} - (-1)^{|x|} x\{\partial y, z\} - (-1)^{|x|+|y|} x\{y, \partial z\}). \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Cette formule entraîne la compatibilité (en homologie) entre le crochet $[\cdot, \cdot]$ et la multiplication $*$. \square

3.3. Opérades des algèbres de Poisson, Gerstenhaber, Batalin-Vilkovissky

3.3.1. Opérades des petites boules et complexes des B -diagrammes généralisés

De manière analogue (au cas linéaire) on peut considérer les opérades topologiques, c'est-à-dire des collections $\{\mathcal{O}(n), n \geq 0\}$ d'espaces topologiques, où le groupe symétrique S_n agit sur chaque $\mathcal{O}(n)$, et on fixe les applications de composition

$$\gamma : \mathcal{O}(k) \times (\mathcal{O}(n_1) \times \dots \times \mathcal{O}(n_k)) \rightarrow \mathcal{O}(n_1 + \dots + n_k), \quad (3.3.1)$$

et un élément unitaire $id \in \mathcal{O}(1)$. On sous-entend de façon analogue, que l'opérade topologique satisfait certaines conditions de l'associativité et de la concordance avec l'action du groupe symétrique.

L'homologie (sur un corps) d'une opérade topologique forme une opérade linéaire \mathbb{Z} -graduée.

Comme exemple d'opérade topologique on peut prendre l'opérade $\mathcal{B}_d = \{\mathcal{B}_d(n), n \geq 0\}$ des petites boules de dimension $d \geq 1$, voir [Co]. Les espaces $\mathcal{B}_d(n)$ sont les espaces de toutes les configurations de n boules ordonnées et disjointes dans une boule unitaire.

Les opérations de composition (3.3.1) sont des "substitutions" de k configurations respectivement de n_1, \dots, n_k boules dans une configuration de k boules.

L'homologie de l'opérade \mathcal{B}_d définit les opérades linéaires \mathbb{Z} -graduées suivantes (voir [Co]):

- 1) Pour $d = 1$ cela donne l'opérade des algèbres associatives.
- 2) Pour $d = 2k + 1$, $k = 1, 2, \dots$, — l'opérade des algèbres de Poisson avec un crochet de degré $1 - d$.
- 3) Pour $d = 2k$, $k = 1, 2, \dots$, — l'opérade des algèbres de Gerstenhaber avec un crochet de degré $1 - d$.

Remarque 3.3.2. L'opérade des algèbres associatives a une filtration naturelle; le quotient gradué correspondant est l'opérade des algèbres de Poisson avec un crochet de degré 0. \square

Théorème 3.3.3. *Le complexe de Hochschild pour l'opérade des algèbres de Poisson (resp. de Gerstenhaber) est naturellement isomorphe au complexe des B -diagrammes généralisés (voir la section 1.3) pour d impair (resp. pair). \square*

Démonstration du Théorème 3.3.3: La seule difficulté technique est de bien comprendre ce qui se passe avec les signes. \square

Le lien entre l'opérade des petites boules et les espaces des nœuds n'est pas fortuit. Il est facile de voir, que l'espace $\mathcal{B}_d(n)$ des configurations de n boules ordonnées et disjointes dans la boule unitaire est homotopiquement équivalent à l'espace des applications injectives de l'ensemble fini (=variété de dimension zéro) $\{1, \dots, n\}$ dans \mathbb{R}^d , ce dernier espace-là peut être vu comme un analogue de dimension finie de l'espace des nœuds.

3.3.2. L'opérade des algèbres de Batalin-Vilkovissky

Définition 3.3.4. Une algèbre de Gerstenhaber \mathcal{A} est appelée *algèbre de Batalin-Vilkovissky*, si sur \mathcal{A} agit une application impaire

$$\delta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}, \quad (3.3.5)$$

telle que

- 1) $\delta^2 = 0$,
 - 2) $\delta(a \cdot b) = \delta(a) \cdot b + (-1)^{\tilde{a}} a \cdot \delta(b) + (-1)^{\tilde{a}-1} [a, b]$. \square
- 1) et 2) entraînent

$$3)\delta([a, b]) = [\delta(a), b] + (-1)^{\tilde{a}-1}[a, \delta(b)].$$

Si l'on est dans la catégorie des espaces \mathbb{Z} -gradués, alors on demande, que δ soit du même degré que le crochet $[\cdot, \cdot]$.

Théorème 3.3.6. *Le complexe de Hochschild pour l'opérade des algèbres de Batalin-Vilkovissky est naturellement isomorphe au complexe des B_* -diagrammes généralisés pour d pair.* \square

Démonstration du Théorème 3.3.6: Analogue à celle du Théorème 3.3.3. \square

L'opérade des algèbres de Batalin-Vilkovissky a aussi une interprétation géométrique comme l'homologie d'une certaine opérade topologique.

Considérons l'opérade des petits disques (boules de dimension $d = 2$). Avec une configuration on va également fixer un point sur le bord de chacun des disques de la configuration. L'espace $\mathcal{B}'_d(n)$ ainsi obtenu des configurations des disques "marqués" est évidemment $\mathcal{B}_d(n) \times \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_n$. Les opérations de composition (3.3.1) sont définies

comme substitution de k configurations respectivement de n_1, \dots, n_k disques "marqués" dans une configuration de k disques "marqués"; sous cette substitution on tourne chacune des k configurations par l'angle correspondant au point (sur le bord) marqué, en supposant que le point fixé du disque unitaire est toujours, par exemple, le point (1,0).

Références

- [BN] D.Bar-Natan, *On the Vassiliev knot invariants*, Topology, 34 (1995), p.p. 423–472.
- [ChD] S.V.Chmutov, S.V.Duzhin, *An upper bound for the number of Vassiliev knot invariants*. J. of Knot Theory and its Ramifications 3 (1994), p.p.141-151.
- [ChDL] S.V.Chmutov, S.V.Duzhin, S.K.Lando, *Vassiliev knot invariants*. I. Introduction, In: Singularities and Bifurcations, Providence, RI: AMS, 1994, p.p. 117–126 (Adv. in Sov Math. 21).
- [Co] F.R.Cohen, *The homology of C_{n+1} -spaces, $n \geq 0$, The homology of iterated loop spaces*, Lecture Notes in Mathematics 533, Springer-Verlag, Berlin, 1976, p.p.207–351.
- [G] V.Ginzburg, *Resolution of diagonals and moduli spaces*, hep-th/9502013.
- [GJ] E.Getzler, J.D.S.Jones, *Operads, homotopy algebra and iterated integrals for double loop spaces*, preprint hep-th/9403055, Departement of Mathematics, Massachusetts Institute of Technology, March 1994.
- [GK] V.Ginzburg, M.Kapranov, *Koszul duality for operads*, Duke Math. J. 76 (1994), p.p.203–272.
- [GV] M.Gerstenhaber, A.Voronov, *Homotopy G -algebras and moduli space operad*, Intern. Math. Res. Notices (1995), No.3, p.p. 141–153.
- [K1] M.Kontsevich, *Vassiliev's knot invariants*, Adv. in Sov. Math., vol.16, part 2, AMS, Providence, RI, 1993, p.p.137–150.
- [K2] M.Kontsevich, *Private communication with V.Vassiliev*, April 1994, Texel Island.
- [Kn] J.A.Kneissler, *The number of primitive Vassiliev invariants up to degree twelve*, q-alg/97060222.

- [KSV] T.Kimura, J.Stasheff, A.A.Voronov, *On operad structures of moduli spaces and string theory*, to appear in Comm. Math. Phys.
- [L] S.K.Lando. *On primitive elements in the bialgebra of chord diagrams*, AMS Translations (2), vol.180, 1997, p.p.167–174.
- [NS] K.Y.Ny, T.Stanford, *On Gusarov’s groups of knot*. To appear in Proc. Camb. Phil. Soc.
- [P] F.Patras, *L’algèbre des descentes d’une bigèbre graduée*, J. of Algebra. 170, 2 (1994), p.p.547–566.
- [S] A.Stoimenow, *Enumeration of chord diagrams and an upper bound for Vassiliev invariants*. J. of Knot Theory and its Ramifications 7 (1998) 93–114.
- [T] V.Tourtchine, *Sur les questions combinatoires de la théorie spectrale des nœuds*, PHD thesis, Université Paris 7, (June 2001) to appear.
- [V1] V.A.Vassiliev, *Cohomology of knot spaces*. In: Adv. in Sov. Math.; Theory of Singularities and its Applications (ed. V.I.Arnol’d). AMS, Providence, R.I., 1990, p.p.23–69.
- [V2] V.A.Vassiliev. *Stable homotopy type of the complement to affine plane arrangements*. Preprint 1991.
- [V3] V.A.Vassiliev. *Complexes of connected graphs*. In: Gelfand’s Mathematical Seminars, 1990–1992. L.Corwin, I.Gelfand, J.Lepovsky, eds. Basel: Birkhäuser, 1993, p.p.223–235.
- [V4] V.A.Vassiliev. *Complements of Discriminants of Smooth Maps: Topology and Applications*. Revised ed. Providence, R.I.: AMS, 1994 (Translation of Mathem. Monographs, 98).
- [V5] V.A.Vassiliev, *Topology of two-connected graphs and homology of spaces of knots*, Preprint 1999.
- [Z] D.Zagier, *Vassiliev invariants and a strange identity related to the Dedekind eta-function*, preprint 1999.

Victor Tourtchine
 Université Indépendante de Moscou,
 Université de Paris 7
 Russia, 121002 Moscow,
 B.Vlassjevskij 11, MCCME
 e-mail: turchin@mccme.ru, tourtchi@acacia.ens.fr